BROWN BOOK

سلسلۂ نصابیات علمی جامعۂ عثمانیہ

صغارِ احصاء

جلد دوم

تصنیف

ہوریس لیمب ایم۔اے ایل ایل ڈی، ایس۔سی۔ڈی، ایف۔آر۔ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔اے و کشن چند ایم۔اے

پروفیسران کلیۂ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۸ھ م سنہ ۱۳۳۸ف م سنہ ۱۹۲۹ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کرکے
طبع و شائع کی گئی ہے

۷۸۶

دیباچہ (از مصنف)

اِس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اِس میں احصا کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کیگئی ہے جو زیادہ تر اِس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اِس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے اِس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کیگئی ہے اور اِس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اِس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ما$$

کا معیاری حل ہے۔ اِس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اِسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اِس لئے اِس کی ابتدا اِس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن

یہ کہنا بیجا نہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کیگئی ہے علم احصا کے تعلق کے مد نظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لامتناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ پہلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استمرار کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی۔ احصا کی کتاب میں اُس وقت اس نظریہ کا داخل کرلینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کردیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کیگئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کرجائے۔

کمیت کے مرکزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قبیل کے چیزوں کا اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کردیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کردیا گیا ہے فقط۔

جون ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

دفعہ	مضمون	صفحہ
	چھٹا باب **تکمل**	

ساتواں باب

محدود تکملے

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

نواں باب

خاص منحنی

دسواں باب

انحنا

حصہ دوم

چھٹا باب

تکمل

۲۷ - مسئلہ کی نوعیت - ابواب گزشتہ میں ہم نے تفاعلوں کے تغیر کی شرح پر غور کیا ہے - احصا تکملات جس کی طرف اب ہم رجوع ہوتے ہیں بالکل الٹے مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے - یعنی اگر تفاعل کے تغیر کی شرح دی ہوئی ہو اور متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت مقرر کر دی گئی ہو تو متبوع متغیر کی کسی اور قیمت کے لئے ہمیں تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہے - علامتوں میں مساوات

$$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{فا}(\text{لا}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کا حل درکار ہے جبکہ فا (لا) متغیر لا کا دیا ہوا تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ لا کی کسی مقررہ قیمت (فرض کرو ا) کے لئے ما ایک خاص قیمت (ب) اختیار کرے - مثلاً متحرک نقطہ کی رفتار کا قانون اور وقت ت پر نقطہ کا مقام دیا گیا ہو تو ان امور کی بنا پر کسی وقت ت پر نقطہ کا مقام دریافت کرنا مقصود ہو سکتا ہے - یہ بات مساوات

$$\frac{\text{ف س}}{\text{ف ت}} = \text{فا}(\text{ت}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

کو حل کرنے کے معادل ہے جس میں فا (ت) وقت ت کا معلومہ تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ ت = ت۰ کے لئے س = س۰ -

اگر ہم ایک مسلسل تفاعل طہ (لا) ایسا دریافت کرسکیں کہ

طہ' (لا) = فہ (لا)

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں تبدیل ہو جاتی ہے

فرما / فرلا = فر / فرلا طہ (لا) .... (۳)

پس اگر ما پر مسلسل ہونے کی قید لگا دی جائے جو احصا کے اکثر عملی اطلاقات کی صورت میں پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۵۶ کے مطابق

ما = طہ (لا) + م جہاں م مستقل ہے ..... (۴)

مساوات (۱) کا جہاں تک تعلق ہے مستقل م کی ٹھیک قیمت غیر معین ہے اور اس لئے م اختیاری مستقل کہلاتا ہے اس سے فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے سوال کی باقی ماندہ شرط جس کا ذکر اوپر ہو چکا ہے پوری ہو سکتی ہے۔

پس اگر لا = ا کے لئے ما = ب تو

ب = طہ (ا) + م

اور اس لئے ما - ب = طہ (لا) - طہ (ا) .... (۵)

اگر دفعہ ۲۵ کے مطابق عامل فر / فرلا کے لئے علامت عف کام میں لائی جائے تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

عف ما = فہ (لا) .... (۶)

اور جبریہ ترقیم کے اصولوں کے مطابق اس کا حل

ما = عف^-۱ فہ (لا) .... (۷)

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جبکہ مقلوب عامل عف^-۱ کی تعریف یہ ہو کہ

عف {عف^-۱ فہ (لا)} = فہ (لا) .... (۸)

تفاعل عف^-۱ فہ (لا) .... (۹)

اگر اس کا وجود ہو تو فہ (لا) کا بلحاظ لا کے 'نامحدود تکملہ' کہلاتا ہے۔

۱۶۲

عام طور پر اسکو ہم

$$\int \text{فہ}(\text{لا})\ \text{فرلا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

سے تعبیر کرینگے۔

اس ترقیم کی ابتدا کی وجہ اگلے باب میں سمجھائی جائے گی۔ فی الحال (۱۰) کو (۹) کے لکھنے کا ایک دوسرا طریقہ خیال کرنا چاہئیے۔

ریاضی کی اکثر شاخوں میں سیدھے اور مقلوب اعمال کے درمیان امتیاز کرنا اکثر ضروری ہوتا ہے۔ سیدھا عمل وہ ہے جو مقررہ قاعدوں کے مطابق کسی دئے ہوئے تفاعل پر ہمیشہ جاری ہو سکے اور اس سے غیر مشتبہ نتیجہ حاصل ہو۔ مقلوب عمل کی نوعیت ایک سوال کی سی ہے یہاں ہمیں وہ تفاعل دریافت کرنا ہوتا ہے جس پر ایک خاص طریقہ سے عمل کرنے سے ایک مقررہ نتیجہ حاصل ہو۔ ممکن ہے کہ اس سوال کا جواب ہو یا اسکا جواب نہو یا ایک سے زیادہ جواب ہوں (دیکھو دفعہ ۱۶)۔ عامل عفت کی صورت میں ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر اسکا ایک جواب موجود ہو تو جمع کردہ مستقل م کے غیر معین ہونیکی وجہ سے جوابوں کی تعداد لاانتہا ہوگی لیکن ہر صورت میں جواب ملتا ہے یا نہیں ابھی تحقیق طلب ہے۔ تاہم ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر مسلسل تفاعل کا نامحدود تکملہ وجود رکھتا ہے اگرچہ اس وسعت کے ساتھ اس مسئلہ کو ثابت کرنیکی ضرورت ہمیں نہیں پڑیگی

اس باب کے باقی ماندہ حصے میں ہم مختلف اقسام کے ریاضی تفاعلوں کے نامحدود تکملے عملی طور پر دریافت کرنے کے سوال پر غور کرینگے۔

مثال۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع + ج ت دی ہوئی ہے تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع} + \text{ج ت} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2\right) \ldots\ldots (11)$$

$$\text{پس}\quad \text{س} = \text{ع ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 + \text{م} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

شرط $\text{س} = \text{س}_\text{ب}$ بوقت $\text{ت} = \text{ت}_\text{ب}$ سے م کو دریافت کرکے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س} - \text{س}_\text{ب} = \text{ع}(\text{ت} - \text{ت}_\text{ب}) + \frac{1}{2}\,\text{ج}(\text{ت}^2 - \text{ت}_\text{ب}^2) \ldots\ldots (13)$$

۳۷۔ معیاری شکلیں:۔ کوئی ایسے اٹل قوانین موجود نہیں ہیں جنکی

مدد سے کسی دیئے ہوئے مسلسل تفاعل فا (لا) کا 'نا محدود تکملہ'
$\int$ فا (لا) فرلا یا عف^{1} فا (لا) دریافت ہو سکے۔ جیساکہ اوپر بتایا
جا چکا ہے تکمل مقلوب عمل ہے جس میں تفرق کے سیدھے عمل کے پہلے نتیجوں
کی یادداشت ہی رہنما بنائی جا سکتی ہے۔

نیز اگرچہ تکملہ ایک خاص معنی میں ہمیشہ وجود رکھتا ہے لیکن ممکن ہے کہ یہ ریاضی میں
عام طور پر استعمال ہونے والے جبریہ یا ماورائی تفاعلوں کے رقوم میں (محدود شکل میں)
بیان نہ ہو سکے۔ اسکی مثالیں ہیں

$$\int \text{هو}^{\text{لا}^2}\,\text{فرلا}\,،\quad \int \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}\,،\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1+\text{لا}^4}}\,،$$

اور انکی فہرست آسانی سے بے حد بڑھائی جا سکتی ہے۔

تکملات کی کم و بیش باقاعدہ فہرست بنانے کے لئے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا چاہئے
کہ مختلف سادہ تفاعلوں کے تفرقات کی ایک فہرست بنالیں۔ ان میں سے ہر ایک
عمل کی تقلیب سے نا محدود تکمل کا ایک ضابطہ حاصل ہو جائیگا۔ اختیاری مستقل کو
جو ہر نامحدود تکملہ میں جمع کیا جاتا ہے صریحی طور پر درج کرنے کی چنداں ضرورت
نہیں ہے لیکن بعض اوقات ایک ہی جملہ کے دو مختلف طریقوں سے حاصل کئے
ہوئے تکملات میں صرف مستقل کا فرق ہوتا ہے ایسے موقعوں پر اختیاری مستقل کی
غیر موجودگی طالب علم پر شدت سے محسوس ہوگی۔

طالب علم کو ذیل کے اساسی نتیجوں سے پوری واقفیت حاصل کرلینی چاہئے۔

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-1} \qquad \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن}+1}\times \text{لا}^{\text{ن}+1}\ [\text{سوائے جبکہ ن} = -1] \quad (\text{ا})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لوک لا} = \frac{1}{\text{لا}} \qquad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ب})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{هو}^{\text{ک لا}} = \text{ک هو}^{\text{ک لا}} \qquad \int \text{هو}^{\text{ک لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ک}}\times \text{هو}^{\text{ک لا}} \quad \ldots\ldots (\text{ج})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{جب لا} = \text{جم لا} \qquad \int \text{جم لا فرلا} = \text{جب لا} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{د})$$

۱۶۴

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جم لا = - جب لا　　$\int$ جب لا فرلا = - جم لا ...... (ع)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ سس لا = قط² لا　　$\int$ قط² لا فرلا = سس لا ...... (ف)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ مم لا = - قم² لا　　$\int$ قم² لا فرلا = - مم لا ...... (گ)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جب⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = $\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$　　$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ = جب⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ * ...... (ح)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ سس⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = $\frac{\text{ا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$　　$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ = $\frac{1}{\text{ا}}$ سس⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ...... (ی′)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جبز لا = جمز لا　　$\int$ جمز لا فرلا = جبز لا ...... (ش)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جمز لا = جبز لا　　$\int$ جبز لا فرلا = جمز لا ...... (ک)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ مسز لا = قطز² لا　　$\int$ قطز² لا فرلا = مسز لا ...... (ل)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ ممز لا = - قمز² لا　　$\int$ قمز² لا فرلا = - ممز لا ...... (م)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جبز⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}$　　$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}$ = جبز⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = لوک $\frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ ...... (ن′)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ جمز⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}$　　$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}$ = جمز⁻¹ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = لوک $\frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ ↑ ...... (ط′)

* علامت کے بارے میں دفعہ ۳۴ دیکھو۔

↑ علامت کے بارے میں دفعہ ۷۴ دیکھو۔

فر/فرلا مسز^{-1} (لا/ا) = ا/(ا² − لا²) اگر لا² < ا²، ∫ فرلا/(ا² − لا²) = 1/ا مسز^{-1} (لا/ا) = 1/(2ا) لوک (ا + لا)/(ا − لا) ......(پ)

فر/فرلا ممز^{-1} (لا/ا) = − ا/(لا² − ا²) اگر لا² > ا²، ∫ فرلا/(لا² − ا²) = − 1/ا ممز^{-1} (لا/ا) = 1/(2ا) لوک (لا − ا)/(لا + ا) ......(ق)

ان میں سے چند ضابطوں کے استعمال میں ذرا احتیاط کی ضرورت ہے۔ اول تو (ح) (آ) (ن) (ط) (پ) (ق) میں ا کی علامت سہولت کے لئے مثبت لے لی گئی ہے۔ یہ ہمیشہ جائز ہے کیونکہ شکل میں صرف ا کا مربع واقع ہوتا ہے۔ نیز جب لا منفی ہو تو ضابطہ (ب) میں ترمیم کرنی پڑے گی کیونکہ منفی مقدار کا لوکارثم نہیں ہوتا۔ اس صورت میں لا = − لاَ اور

ما = لوک لاَ رکھنے سے

فرما/فرلا = − فرما/فرلاَ = − 1/لاَ = 1/لا

پس ∫ فرلا/لا = لوک لاَ

لا کے مثبت یا منفی ہونے کی دونوں صورتیں ذیل کے ضابطے میں شریک ہیں

∫ فرلا/لا = لوک |لا| ....(ب)

نیز (ط) میں لا کو مثبت مان لیا گیا ہے۔ اور (پ) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ |لا| < ا اور (ق) میں کہ |لا| > ا۔

۴۷:۔ ضابطوں کی سادہ توسیع:۔ اوپر کے نتائج کی توسیع کرنے کے لئے اول ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا میں مستقل جمع کر دینے سے ضابطوں کی شکل میں کوئی بنیادی فرق نہیں پڑتا۔ [دفعہ ۳۲ (آ) دیکھو]

پس ظاہر ہے کہ $\int (لا + ا)^م فرلا = \frac{1}{م+1} (لا + ا)^{م+1}$ ...... (۱)

$\int \frac{فرلا}{لا + ا} =$ لوک $(لا + ا)$ .... (۲)

$\int \frac{فرلا}{\sqrt{۲ ا لا - لا^۲}} = \int \frac{فرلا}{\sqrt{ا^۲ - (لا - ا)^۲}} =$ جب$^{-1} \frac{لا - ا}{ا}$ .... (۳)

اور اسی طرح ـ چند دیگر مثالیں دفعہ ۵ ۷ اور ۶ ۷ میں دی گئی ہیں ـ
نیز اگر لا کو مستقل م سے ضرب دے دیا جائے تو تکمل کی شکل پہلے جیسی ہی رہتی ہے سوائے اسکے کہ وہ م پر تقسیم ہو جاتا ہے ـ [دفعہ ۳۲ (۲) دیکھو]

مثلاً $\int$ جب ک لا فرلا $= -\frac{1}{ک}$ جم ک لا .... (۴)

$\int \frac{فرلا}{ا لا + ب} = \frac{1}{ا}$ لوک $(ا لا + ب)$ ...... (۵)

۱۹۹

اور علیٰ ہذا القیاس ـ

نیز $\int م ع فرلا = م \int ع فرلا$ ..... (۶) جہاں م مستقل ہے ـ

اور $\int (ع + و + ھ + ...) فرلا = \int ع فرلا + \int و فرلا + \int ھ فرلا + ..$ (۷)

کیونکہ اگر دونوں طرف $\frac{ف}{فرلا}$ سے عمل کریں تو ہر ایک صورت میں دفعہ ۲۹ اور ۳۰ کی رو سے ایک مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے ـ (۷) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ارقام کی تعداد محدود ہے ـ

پس منطق صحیح تفاعل $ا_. لا^م + ا_۱ لا^{م-۱} + ... ا_{م-۱} لا + ا_م$ .... (۸)

کا نامحدود تکملہ $\frac{1}{م+1} ا_. لا^{م+1} + \frac{1}{م} ا_۱ لا^م + ... + \frac{1}{۲} ا_{م-۱} لا^۲ + ا_م لا$ ... (۹) ہوگا

اب فرض کرو کہ منطق کسر کی شکل ہے $\frac{فا(لا)}{لا + ا}$ .... (۱۰)

عمل تقسیم سے یا ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر $\frac{۱}{لا + ی}$ .... (۱۱)
کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے۔ پہلے حصے کا تکمل اوپر کے قاعدہ سے عمل میں لا سکتے ہیں اور (۱۱) کا تکمل ہے $ا$ لوک $(لا + ا)$ .... (۱۲)

مثال (۱) $\int (لا - ۱)^{\frac{۳}{۲}} فرلا = \frac{۱}{۱ + \frac{۳}{۲}} (لا - ۱)^{۱ + \frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۵} (لا - ۱)^{\frac{۵}{۲}}$

مثال (۲) $\int \frac{فرلا}{۲لا - ۱} = \frac{۱}{۲}$ لوک $(۲لا - ۱)$

مثال (۳) $\int حب^۲ لا\, فرلا = \frac{۱}{۲} \int (۱ - جم ۲لا) فرلا = \frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۴} جب ۲لا$

مثال (۴) $\int مس^۲ لا\, فرلا = \int (قط^۲ لا - ۱) فرلا = مس لا - لا$

مثال (۵) $\int \frac{لا^۳}{۲لا - ۱} فرلا = \int \left\{ \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۴} لا + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸(۲لا - ۱)} \right\} فرلا$
$= \frac{۱}{۶} لا^۳ + \frac{۱}{۸} لا^۲ + \frac{۱}{۸} لا + \frac{۱}{۱۶}$ لوک $(۲لا - ۱)$

۷۵ - دو درجی نسب نما والی منطق کسریں - اب ہم بتائینگے کہ

$\frac{فا (لا)}{لا^۲ + پ لا + ق}$ .... (۱)

کی شکل کے کسی جملہ کو کس طرح تکمل کر سکتے ہیں جہاں فا (لا) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اگر ضرورت ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرو تاکہ باقی ا لا + ب کی شکل کا رہ جائے۔ پس تفاعل (۱) ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر

$\frac{ا لا + ب}{لا^۲ + پ لا + ق}$ .... (۲)

کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر ہو سکتا ہے۔ پہلا حصہ دفعہ ۷۴ کے طریقہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ اب صرف حصہ (۲) پر غور کرنا باقی ہے۔

پہلے ہم $\frac{\text{۱}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}$ .... (۳) پر غور کرینگے۔

نتیجہ کی شکل اس بات پر منحصر ہے کہ آیا $\text{پ}^2 \gtrless \text{۴ق}$۔ اگر $\text{پ}^2 > \text{۴ق}$ ہے تو دو درجی جملہ حقیقی اور جداگانہ اجزاء ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس

$$\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ}) \quad .... (۴)$$

اور مستقلات ا اور ب کو مناسب قیمت دیکر ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{۱}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad ...... (۵)$$

یہ مساوات متماثلہ ہوگی بشرطیکہ

$$\text{۱} = \text{ا}(\text{لا} - \text{بہ}) + \text{ب}(\text{لا} - \text{عہ}) \quad .... (۶)$$

یعنی $\text{ا} + \text{ب} = \text{۰}$ اور $\text{ا بہ} + \text{ب عہ} = -\text{۱}$ .... (۷)

یعنی $\text{ا} = \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ اور $\text{ب} = -\frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ .... (۸)

پس $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{۱}}{(\text{عہ} - \text{بہ})} \left\{ \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{عہ}} - \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{بہ}} \right\}$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \left\{ \text{لوک}(\text{لا} - \text{عہ}) - \text{لوک}(\text{لا} - \text{بہ}) \right\}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{عہ} - \text{بہ}} \, \text{لوک} \, \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad .... (۹)$$

جب ہم نے ایک مرتبہ اس بات کو معلوم کر لیا کہ (۵) کے دونوں طرفین متماثلاً مساوی کئے جا سکتے ہیں تو ا اور ب کی قیمت ذیل کے طریقہ سے زیادہ آسانی سے دریافت ہو سکتی ہے۔ اول ہم دونوں طرف (لا − عہ) سے ضرب دیتے ہیں اور پھر اسمیں لا = عہ رکھنے سے ا کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔ اسی طرح دونوں طرف (لا − بہ) سے ضرب دیکر لا = بہ رکھنے سے ب کی قیمت حاصل ہوتی ہے
پس ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔ ا دریافت کرنے کے لئے جملہ کے

نسب نما میں اس کے متناظر جزوی ضربی کو نکال دو اور باقی ماندہ جملہ میں لا = عا رکھ دو۔ اسی طرح ب کے لئے۔

اگر $\text{پ}^2 = ۴\,\text{ق}$ تو

$$\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ})^2$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ})^2} = -\frac{1}{\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

اگر $\text{پ}^2 < ۴\,\text{ق}$ تو

$$\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ})^2 + (\text{ق} - \tfrac{1}{4}\text{پ}^2) = (\text{لا} - \text{عا})^2 + \text{با}^2$$

جسمیں عا اور با حقیقی ہیں اور با کو مثبت لے لیا جا سکتا ہے۔

اب دفعہ ۳۷ (آ) کی سادہ توسیع سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عا})^2 + \text{با}^2} = \frac{1}{\text{با}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عا}}{\text{با}} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

$\text{پ}^2 > ۴\,\text{ق}$ والا نتیجہ (۱۱) کے مشابہ شکل میں لکھا جا سکتا ہے کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ})^2 - (\tfrac{1}{4}\text{پ}^2 - \text{ق}) = (\text{لا} - \text{عَا})^2 - \text{بَا}^2 \quad \ldots (12)$$

جسمیں عَا اور بَا حقیقی ہیں اور بَا کو مثبت فرض کر لیا جا سکتا ہے۔ اب اگر $|\text{لا} - \text{عَا}| < \text{بَا}$ سے تو دفعہ ۴۷ (پ) سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{بَا}^2 - (\text{لا} - \text{عَا})^2} = \frac{1}{\text{بَا}}\,\text{مسز}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عَا}}{\text{بَا}} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

اسمیں اگر عَا + بَا = عا اور عَا - بَا = با رکھیں تو دفعہ ۶۴ سے بآسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ (۹) کے معادل ہے۔

اگر $|\text{لا} - \text{عَا}| > \text{بَا}$ تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عَا})^2 - \text{بَا}^2} = -\frac{1}{\text{بَا}}\,\text{ممز}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عَا}}{\text{بَا}} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

اب زیادہ عام شکل (۲) پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ل اور م کے مناسب انتخاب سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ا لا} + \text{ب} = \text{ل}\,(\text{۲ لا} + \text{پ}) + \text{م} \qquad \cdots\cdots (۱۵)$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{م} = \text{ب} - \tfrac{1}{2}\,\text{ا پ} \qquad \cdots\cdots (۱۶)$$

$$\text{پس}\ \int \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}\,\text{فرلا} = \text{ل}\int \frac{\text{۲ لا} + \text{پ}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}\,\text{فرلا} + \text{م}\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}} \qquad \cdots\cdots (۱۷)$$

ظاہر ہے کہ بائیں طرف کے دو تکملات میں پہلا

$$\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}) \qquad \cdots\cdots (۱۸)$$

کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

اگر نسب نما دو حقیقی جدا گانا اجزاء میں تحویل ہو سکتا ہے تو (۱۷) کے دائیں جانب کے تکملہ کو "جزوی کسروں" کے طریقے سے زیادہ آسانی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{(\text{لا} - \text{عا})(\text{لا} - \text{با})} = \frac{\textbf{ا}}{\text{لا} - \text{عا}} + \frac{\textbf{ب}}{\text{لا} - \text{با}} \qquad \cdots\cdots (۱۹)$$

$$\text{بشرطیکہ}\quad \text{ا لا} + \text{ب} = \textbf{ا}\,(\text{لا} - \text{با}) + \textbf{ب}\,(\text{لا} - \text{عا})$$

$$\text{یعنی بشرطیکہ}\quad \textbf{ا} + \textbf{ب} = \text{ا} \quad \text{اور} \quad \textbf{ا}\,\text{با} + \textbf{ب}\,\text{عا} = -\text{ب} \qquad \cdots\cdots (۲۰)$$

$$\text{یعنی}\quad \textbf{ا} = \frac{\text{ا عا} + \text{ب}}{\text{عا} - \text{با}} \quad \text{اور} \quad \textbf{ب} = \frac{\text{ا با} + \text{ب}}{\text{با} - \text{عا}} \qquad \cdots\cdots (۲۱)$$

ہر صورت میں اس طول عمل کی ضرورت نہیں کیونکہ **ا** اور **ب** کی قیمتیں صفحہ (۲۲۹) پر کے طریقہ سے با آسانی دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$\text{پس (۱۷) کے تکمل سے}\ \int \frac{(\text{ا لا} + \text{ب})\,\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عا})(\text{لا} - \text{با})} = \textbf{ا}\ \text{لوک}\,(\text{لا} - \text{عا}) + \textbf{ب}\ \text{لوک}\,(\text{لا} - \text{با}) \qquad \cdots\cdots (۲۲)$$

$$\text{مثال (۱)}\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{۲} - \text{لا} - \text{لا}^2}\ \text{کی قیمت دریافت کرو۔}$$

$$\text{فرض کرو کہ}\quad \frac{1}{(\text{لا} + \text{۲})(\text{۱} - \text{لا})} = \frac{\textbf{ا}}{(\text{۱} - \text{لا})} + \frac{\textbf{ب}}{\text{لا} + \text{۲}}$$

تو مذکورہ بالا طریقہ سے $\text{ا} = \frac{۱}{۳}$ اور $\text{ب} = \frac{۱}{۳}$

بس $\int \frac{\text{فرلا}}{۲-\text{لا}-\text{لا}^۲} = -\frac{۱}{۳}\,\text{لوک}(۱-\text{لا}) + \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}(۲+\text{لا}) = \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,\frac{۲+\text{لا}}{۱-\text{لا}}$

بطریقہ دیگر

$$\int \frac{\text{فرلا}}{۲-\text{لا}-\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{۹}{۴}-(\text{لا}+\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{۲}{۳}\,\text{مستز}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}\,\text{مستز}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}+۱}{۳}$$

مثال (۲) - $\int \frac{\text{فرلا}}{۱-۴\text{لا}+۴\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{(۲\text{لا}-۱)^۲} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲\text{لا}-۱}$

مثال (۳) - $\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$

مثال (۴) - $\int \frac{۱-\text{لا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \int \frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(۲\text{لا}-۱)}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا}$

$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲} - \frac{۱}{۲}\int \frac{۲\text{لا}-۱}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(۱-\text{لا}+\text{لا}^۲)$$

مثال (۵) - $\frac{۲\text{لا}-۳}{(\text{لا}-۲)(\text{لا}+۱)}$ کو تکمل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{۲\text{لا}-۳}{(\text{لا}-۲)(\text{لا}+۱)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}-۲} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}+۱}$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ا} = \frac{۱}{۳}$ اور $\text{ب} = \frac{۵}{۳}$

اس لئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}(\text{لا}-۲) + \frac{۵}{۳}\,\text{لوک}(\text{لا}+۱)$

۷۶ - شکل $\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ا لا}^۲ + \text{ب لا} + \text{ج}}}$ -

اس قسم کے تفاعلوں کے لئے بھی اوپر سے ملتا جلتا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

(آ) اگر ا مثبت ہے تو یہ ذیل کی شکل کے معادل ہے

$$\frac{\text{ا لا + ب}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

سب سے پہلے شکل $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}}$ ......(۲) پر غور کرو۔

مربع کو کامل بنانے سے جذر کی علامت کے اندر کا جملہ $(\text{لا} - \text{عـ})^2 \pm \text{بـہ}^2$ کی ایک یا دوسری شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اب دفعہ ۲۷ (ص) اور (ط) سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \text{عـ})^2 + \text{بـہ}^2}} = \text{جبز}^{-1}\,\frac{\text{لا} - \text{عـ}}{\text{بـہ}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا} - \text{عـ})^2 - \text{بـہ}^2}} = \text{جمز}^{-1}\,\frac{\text{لا} - \text{عـ}}{\text{بـہ}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

ان تفاعلوں کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لوک}\,\frac{\text{لا} - \text{عـ} + \sqrt{(\text{لا} - \text{عـ})^2 \pm \text{بـہ}^2}}{\text{بـہ}} \quad \text{یا لوک}\,\frac{\text{لا} - \text{عـ} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}}{\text{بـہ}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

[دفعہ ۴۶ دیکھو]

عام صورت (۱) میں ہم فرض کرتے ہیں

$$\text{ا لا + ب} = \text{لـ}\,(\text{لا} + \tfrac{1}{2}\,\text{پ}) + \text{مـ} \quad \ldots\ldots (۶)$$

جو پوری ہوتی ہے اگر $\text{لـ} = \text{ا}$ اور $\text{مـ} = \text{ب} - \tfrac{1}{2}\,\text{پ ا}$ ......(۷)

اسلئے

$$\int \frac{\text{ا لا + ب}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}}\,\text{فرلا} = \text{لـ} \int \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}}\,\text{فرلا} + \text{مـ} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

پہلا تکملہ $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{پ لا + ق}}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر بحث ہو چکی ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ اس دفعہ کی ابتدائی شکل میں سر ا منفی ہے۔ عمومیت میں فرق آنے کے بغیر اسے −۱ کے مساوی لیا جاسکتا ہے۔

پہلے تفاعل

$$\frac{1}{\sqrt{ق + پ لا - لا^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

پر غور کرو۔

اب سوائے اس صورت کے جبکہ دو درجی جملہ حقیقتاً منفی ہو (جس صورت میں لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے یہ خیالی ہوگا) جملہ کو $ب^2 - (لا - عہ)^2$ کی شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

$$اب \int \frac{فرلا}{\sqrt{ب^2 - (لا - عہ)^2}} = جب^{-1} \frac{لا - عہ}{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

تفاعل کی عام صورت

$$\frac{ا لا + ب}{\sqrt{ق + پ لا - لا^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

میں فرض کرو کہ $ا لا + ب = لہ (\frac{1}{2} پ - لا) + مہ \ldots\ldots (12)$

یعنی $لہ = -ا$ اور $مہ = ب + \frac{1}{2} ا پ \ldots\ldots\ldots (13)$

$$اس لئے \int \frac{ا لا + ب}{\sqrt{ق + پ لا - لا^2}} فرلا = لہ \int \frac{\frac{1}{2} پ - لا}{\sqrt{ق + پ لا - لا^2}} فرلا$$

$$+ مہ \int \frac{فرلا}{\sqrt{ق + پ لا - لا^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

ان دو میں سے پہلا تکملہ $\sqrt{ق + پ لا - لا^2}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

$$مثال ۱ - \int \frac{لا + 1}{\sqrt{1 - لا - لا^2}} فرلا = \int \frac{(لا + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - لا - لا^2}} فرلا = \int \frac{لا + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - لا - لا^2}} فرلا$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{فرلا}{\sqrt{\frac{5}{4} - (لا + \frac{1}{2})^2}} = -\sqrt{1 - لا - لا^2} + \frac{1}{2} جب^{-1} \frac{لا + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

$$= -\sqrt{1 - لا - لا^2} + \frac{1}{2} جب^{-1} \frac{2لا + 1}{\sqrt{5}}$$

مثال ۲ - $\int \frac{\text{لا}+1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا} = \int \frac{(\text{لا}+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{لا}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1}}\,\text{فرلا}$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1} + \frac{1}{2}\,\text{جبز}^{-1}\frac{\text{لا}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\text{لا}^2+\text{لا}+1} + \frac{1}{2}\,\text{جبز}^{-1}\frac{2\text{لا}+1}{\sqrt{3}}$$

مثال ۳:- $\int \sqrt{\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \int \frac{1-\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} - \int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

$$= \text{جب}^{-1}\text{لا} + \sqrt{1-\text{لا}^2}$$

۷ - تغیر کی تبدیلی:- تکمل کے دریافت کرنے میں دو ترکیبیں خاص طور پر مفید ثابت ہوتی ہیں ایک تو نئے متبوع تغیر کا انتخاب اور دوسرے تکمل بالتحصص۔

فرض کرو کہ تکملہ $\text{ع} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ .... (۱)

میں متغیر کو لا سے ت میں بدلنا ہے جہاں لا نئے متغیر ت کا دیا ہوا تفاعل ہے تو دفعہ ۳۲ سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{فہ}(\text{لا}) \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots (۲)$$

اور اس لئے مقلوب علامت $\int$ کی تعریف سے

$$\text{ع} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$$

پس $\int \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int \text{فہ}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$ .... (۳)* ۱۴۳

*[اس سے قاعدہ نکلتا ہے کہ علامت $\int$ کے بعد فرلا کی بجائے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ فرت درج کردو]

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\text{فرت}}{\text{ت}^2(\text{ا}^2+\text{ت}^{-2})^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\text{ت فرت}}{(1+\text{ا}^2\text{ت}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\text{ا}^2\text{ت}^2}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

اسی طرح

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-\text{ا}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

تکمل

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا لا}^2+\text{ب لا}+\text{ج})^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

کو مربع کامل بنانے سے یہ مذکورہ بالا صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

۸۷ — مثلثی تفاعلوں کا تکمل۔

(ا)

$$\int \text{مس لا فرلا} = \int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}\,\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم لا}} = -\text{لوگ جم لا}$$

$$= \text{لوگ قط لا} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح

$$\int \text{مم لا فرلا} = \text{لوگ جب لا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اسی ترکیب سے

$$\int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم}^2\,\text{لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}} = \text{قط لا} \quad \ldots (۳)$$

اور

$$\int \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^2\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = -\text{قم لا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

دفعہ ۳۱ (۲) دیکھو۔

(ب)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{2\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{قط}^2\frac{\text{لا}}{2}\,\text{فرلا}}{\text{مس}\frac{\text{لا}}{2}}$$

= ∫ فر(مس لا/۲) / مس لا/۲ = لوگ مس لا/۲ ....(۵)

اس سے ہم اخذ کرتے ہیں

∫ فرلا / جم لا = ∫ فرلا / جب(π/۲ + لا) = لوگ مس (π/۴ + لا/۲) ...(۶)

ضوابط (۱) تا (۶) معیاری نتیجے شمار ہوتے ہیں اور انہیں حفظ کر لینا چاہیے

(۳) ∫ فرلا / (ا + ب جم لا) = ∫ فرلا / ((ا + ب) جم^۲ لا/۲ + (ا − ب) جب^۲ لا/۲)

= ∫ قط^۲ لا/۲ فرلا / ((ا + ب) + (ا − ب) مس^۲ لا/۲) ....(۷)

اب اسمیں اگر مس لا/۲ = ع رکھیں تو

= ۲ ∫ فرع / ((ا + ب) + (ا − ب) ع^۲) ....(۸)

اور یہ دفعہ ۳، کی معیاری شکلوں (آ)، (پ)، (ق) میں سے کسی ایک کے تحت آتا ہے۔

اسی طرح اسی ابدال سے ∫ فرلا / (ا + ب جب لا) = ۲ ∫ فرع / (ا + ۲ب ع + اع^۲) ...(۹)

(۴) ∫ فرلا / (ا^۲ جم^۲ لا + ب^۲ جب^۲ لا) = ∫ قط^۲ لا فرلا / (ا^۲ + ب^۲ مس^۲ لا) ....(۱۰)

اور اسمیں مس لا = ع رکھنے سے

= ∫ فرع / (ا^۲ + ب^۲ ع^۲) = ۱/ب ∫ فر(ب ع) / (ا^۲ + (ب ع)^۲) = ۱/اب مس^-۱ ب ع/ا

= ۱/اب مس^-۱ (ب/ا مس لا) ....(۱۱)

زائدی تفاعلوں والے متشابہ نتیجے یہاں درج کئے جاتے ہیں ۔

∫ مسز لا فر لا = لوک جمز لا ، ∫ ممز لا فر لا = لوک جنز لا ۔۔۔۔(۱۲)

∫ (جنز لا / ممز^۲ لا) فر لا = ـ قطز لا ، ∫ (جمز لا / جنز^۲ لا) فر لا = ـ قمز لا ۔۔۔(۱۳)

∫ (فر لا / جنز لا) = لوک مسز (لا / ۲) ۔۔۔۔۔۔۔۔۔(۱۴)

∫ (فر لا / جمز لا) = ۲ ∫ (فو^لا فر لا / فو^۲لا + ۱) = ۲ سں^-۱ فو^لا ۔۔۔۔۔۔(۱۵)

اسی طرح شکلوں ∫ (فر لا / ا + ب جمز لا) اور ∫ (فر لا / ا + ب جنز لا) کا تکمل ابدال

مسز (لا / ۲) = ع سے عمل میں آسکتا ہے ۔

۷ ۹ ـ مثلثی ابدال ـ جبریہ تفاعلوں کا تکمل جنمیں دو درجی جملوں کا جذر شامل ہوتا ہے اکثر اوقات متبوع متغیر کی بجائے مثلثی یا زائدی تفاعل درج کرنے سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے ۔

شلاً √(ا^۲ - لا^۲) کی موجودگی سے ابدال لا = ا جب طہ یا لا = ا مسز ع ذہن میں آتا ہے ،

نیز √(لا^۲ - ا^۲) کی موجودگی سے ابدال لا = ا قط طہ یا لا = ا جمز ع

اور √(لا^۲ + ا^۲) کی موجودگی سے ابدال لا = ا مس طہ یا لا = ا جنز ع کی طرف توجہ جاتی ہے ۔

مثال (۱) :- تکملہ ∫ √(ا^۲ - لا^۲) فر لا ۔۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱) کو دریافت کرو ۔

لا = ا جب طہ اور فرلا = ا جم طہ فرطہ رکھنے سے

$\int \sqrt{ا^2 - لا^2}$ فرلا = ا^2 $\int$ جم^2 طہ فرطہ = $\frac{1}{2}$ ا^2 $\int$ (۱ + جم ۲ طہ) فرطہ

= $\frac{1}{2}$ ا^2 (طہ + $\frac{1}{2}$ جب ۲ طہ) = $\frac{1}{2}$ ا^2 جب$^{-1}$ $\frac{لا}{ا}$ + $\frac{1}{2}$ لا $\sqrt{ا^2 - لا^2}$

.... (۲)

مثال (۲) تکملہ $\int \frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا^2}$ فرلا .... (۳) دریافت کرو۔

لا = ا جبز ع اور فرلا = ا جمز ع فر ع درج کرنے سے

$\int \frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا^2}$ فرلا = $\int$ ہمز^2 ع فر ع = $\int$ (۱ + قمز^2 ع) فرع

= ع - ہمز ع = جبز$^{-1}$ $\frac{لا}{ا}$ - $\frac{\sqrt{لا^2 + ا^2}}{لا}$ ... (۴)

۱۲۸

مثال (۳)۔ $\int \frac{فرلا}{(۱ - لا) \sqrt{۱ - لا^2}}$ کو دریافت کرو۔

اگر لا = جم طہ اور فرلا = - جب طہ فرطہ اس میں درج کریں تو

تکملہ = - $\int \frac{فرطہ}{۱ - جم طہ}$ = - $\frac{1}{2}$ $\int \frac{فرطہ}{جب^2 (\frac{1}{2} طہ)}$ = ہم ($\frac{1}{2}$ طہ) = $\sqrt{\frac{۱ + لا}{۱ - لا}}$

۸۰ ـ تکمل بالحصص

دفعہ ۷۰ میں جس طریقہ کا ذکر کیا گیا ہے یعنی "تکمل بالحصص" وہ دفعہ ۳۰ کے ضابطہ

$\frac{فر}{فرلا}$ (ع و) = ع $\frac{فر و}{فرلا}$ + و $\frac{فر ع}{فرلا}$ .... (۱)

کو الٹانے سے حاصل ہوتا ہے۔ طرفین کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ع و = $\int$ ع $\frac{فر و}{فرلا}$ فرلا + $\int$ و $\frac{فر ع}{فرلا}$ فرلا

جس سے $\int \text{ع} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \text{فر لا} = \text{ع و} - \int \text{و} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \text{فر لا}$ .... (۲)×

اس سے ذیل کا قاعدہ معلوم ہوتا ہے۔

اگر تکمل شدنی جملہ دو اجزاء کا حاصل ضرب ہو جس میں سے ایک $\left(\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}\right)$ فوراً تکمل ہو سکے تو اسے یہ فرض کر کے تکمل کیا جا سکتا ہے کہ دوسرا جزو (ع) مستقل ہے بشرطیکہ تکمل شدہ جزو (و) اور دوسرے جزو کے مشتق $\left(\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}\right)$ کے حاصل ضرب کے تکمل کو اس میں سے گھٹا دیا جائے۔

(۲) میں و = لا رکھنے سے ایک بہت مفید خاص شکل حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\int \text{ع فر لا} = \text{لا ع} - \int \text{لا} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \text{فر لا} \quad \text{........ (۳)}$$

اس قاعدہ کے استعمال کی چند اہم مثالیں ذیل میں درج ہیں

(۱) $\int \text{لوگ لا فر لا} = \text{لا لوگ لا} - \int \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} \text{فر لا}$

$= \text{لا لوگ لا} - \text{لا}$ .... (۴)

(۲) $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فر لا}$ دریافت کرو۔

نتیجہ (۳) میں $\text{ع} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ رکھنے سے

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فر لا} = \text{لا} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} + \int \frac{\text{لا}^2\ \text{فر لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \quad \text{....... (۵)}$$

× اگر ہم $\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے و لکھیں یعنی و کی بجائے $\text{عف}^{-1}\text{و}$ تو اسکی شکل ہو جاتی ہے

$\text{عف}^{-1}(\text{ع و}) = \text{ع عف}^{-1}\text{و} - \text{عف}^{-1}(\text{عف ع} \times \text{عف}^{-1}\text{و})$

لیکن $\int \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{ا}^{۲} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}} - \int \frac{\text{لا}^{۲}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}}$

$$= \text{ا}^{۲}\ \text{جب}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \int \frac{\text{لا}^{۲}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}} \quad \text{....(۶)}$$

(۶) اور (۵) کے حاصل جمع کو ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ۔

$$\int \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا} \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۲}\ \text{ا}^{۲}\ \text{جب}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \text{.....(۷)}$$

دفعہ ۷۹ مثال (۱) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

بالکل اسی طریقہ سے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$\int \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا} \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۲}\ \text{ا}^{۲}\ \text{جبز}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \text{....(۸)}$$

اور

$$\int \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا} \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} - \frac{۱}{۲}\ \text{ا}^{۲}\ \text{جمز}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \text{.....(۹)}$$

(۳) تکملوں $\text{پ} = \int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا فرلا}$ اور $\text{ق} = \int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا فرلا}$ ..(۱۰)

کی قیمتیں دریافت کرنا ۔

(۲) میں $\text{ع} = \text{جم بہ لا}$ اور $\text{و} = \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}$ رکھنے سے

$$\text{پ} = \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا} - \int \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}} (-\text{بہ جب بہ لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا} + \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\ \text{ق} \quad \text{...(۱۱)}$$

اسی طرح $\text{ق} = \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا} - \int \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{بہ جم بہ لا فرلا}$

$$= \frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا} - \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\ \text{پ} \quad \text{....(۱۲)}$$

۱۸۰

پس

$$\left.\begin{aligned} \text{عہ پ} - \text{بہ ق} &= \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا} \\ \text{بہ پ} + \text{عہ ق} &= \text{فو}^{\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا} \end{aligned}\right\} \quad \text{............(۱۳)}$$

اور اس لئے $\int$ قو^{عہ لا} جم بہ لا فرلا = $\frac{\text{بہ جب بہ لا + عہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}$ × قو^{عہ لا}

$\int$ قو^{عہ لا} جب بہ لا فرلا = $\frac{\text{عہ جب بہ لا - بہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}$ × قو^{عہ لا} (۱۴)

۱۸ — **متواتر تحویل سے تکمل**:- بعض اوقات تکمل بالخصوص یا کسی اور طریقہ سے ایک تکملہ کا حاصل دوسرے آسان تکملہ کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ ع~ن~ = $\int$ لا^ن قو^{عہ لا} فرلا .... (۱)

تو ع~ن~ = $\frac{1}{\text{عہ}}$ قو^{عہ لا} × لا^ن - $\int \frac{1}{\text{عہ}}$ قو^{عہ لا} × ن لا^{ن-۱} فرلا

= $\frac{1}{\text{عہ}}$ قو^{عہ لا} لا^ن - $\frac{\text{ن}}{\text{عہ}}$ ع~ن-۱~ .... (۲)

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس ضابطہ کے مسلسل استعمال سے ع~ن~ تکملہ ع~۰~ کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے

جہاں ع~۰~ = $\int$ قو^{عہ لا} فرلا = $\frac{1}{\text{عہ}}$ قو^{عہ لا} .... (۳)

مثال (۱) اگر ع~ن~ = $\int$ لا^ن قو^{-لا} فرلا .... (۴)

تو ع~ن~ = - لا^ن قو^{-لا} + ن ع~ن-۱~ .... (۵)

مثلاً ع~۳~ = - لا^۳ قو^{-لا} + ۳ ع~۲~ = - لا^۳ قو^{-لا} + ۳ (- لا^۲ قو^{-لا} + ۲ ع~۱~)

= - لا^۳ قو^{-لا} - ۳ لا^۲ قو^{-لا} + ۶ (- لا قو^{-لا} + ع~۰~)

یعنی $\int$ لا^۳ قو^{-لا} فرلا = - (لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۶ لا + ۶) قو^{-لا}

(۲) فرض کرو کہ ع~ن~ = $\int$ لا^ن جم بہ لا فرلا

اور ف~ن~ = $\int$ لا^ن جب بہ لا فرلا .... (۶)

$$\text{تو}\quad ع_ن = \frac{1}{\text{به}}\,\text{جب به لا}\times \text{لا}^{ن} - \int \frac{1}{\text{به}}\,\text{جب به لا}\times ن\,\text{لا}^{ن-1}\,\text{ذلا}$$

$$= \frac{1}{\text{به}}\,\text{جب به لا}\times \text{لا}^{ن} - \frac{ن}{\text{به}}\, و_{ن-1} \quad\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\text{اور}\quad و_ن = -\frac{1}{\text{به}}\,\text{جم به لا}\times \text{لا}^{ن} - \int \left(-\frac{1}{\text{به}}\,\text{جم به لا}\right) ن\,\text{لا}^{ن-1}\,\text{ذلا}$$

$$= -\frac{1}{\text{به}}\,\text{جم به لا}\times \text{لا}^{ن} + \frac{ن}{\text{به}}\, ع_{ن-1} \quad\ldots\ldots (8)$$

۱۸۱

اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ان ضابطوں کی مدد سے $ع_ن$ اور $و_ن$ معلوم تکملوں $ع_{\cdot}$ یا $و_{\cdot}$ کے رقوم میں ظاہر ہو سکتے ہیں۔

مثال (۱)، ۔ پس اگر به = ۱ تو

$$ع_ن = \text{لا}^{ن}\,\text{جب لا} - ن\, و_{ن-1} \quad \text{اور} \quad و_ن = -\text{لا}^{ن}\,\text{جم لا} + ن\, ع_{ن-1} \quad\ldots\ldots (9)$$

$$\text{مثلاً}\quad ع_3 = \text{لا}^{3}\,\text{جب لا} - 3\, و_2 = \text{لا}^{3}\,\text{جب لا} - 3\left(-\text{لا}^{2}\,\text{جم لا} + 2\, ع_1\right)$$

$$= \text{لا}^{3}\,\text{جب لا} + 3\,\text{لا}^{2}\,\text{جم لا} - 6\left(\text{لا جب لا} - و_{\cdot}\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \int \text{لا}^{3}\,\text{جم لا}\,\text{ذلا} = \left(\text{لا}^{3} - 6\,\text{لا}\right)\text{جب لا} + \left(3\,\text{لا}^{2} - 6\right)\text{جم لا}$$

$$(3)\ \text{اگر}\quad ع_ن = \int \text{مس}^{ن}\,\text{طہ}\,\text{ذطہ} \quad\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$= \int \text{مس}^{ن-2}\,\text{طہ}\left(\text{قط}^{2}\,\text{طہ} - 1\right)\text{ذطہ}$$

$$= \int \text{مس}^{ن-2}\,\text{طہ}\,\text{ذ}(\text{مس طہ}) - \int \text{مس}^{ن-2}\,\text{طہ}\,\text{ذطہ}$$

$$\text{تو}\quad ع_ن = \frac{1}{ن-1}\,\text{مس}^{ن-1}\,\text{طہ} - ع_{ن-2} \quad\ldots\ldots\ldots (11)$$

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $ع_ن$ کی قیمت ن کے طاق یا جفت ہونے پر بالترتیب

$$ع_1 = \int \text{مس طہ}\,\text{ذطہ} = \text{لوگ قط طہ} \quad\ldots\ldots (12)$$

$$\text{یا}\quad ع_{\cdot} = \int \text{ذطہ} = \text{طہ} \quad\ldots\ldots (13)$$

پر منحصر ہوگی۔

اسی طرح اگر $و_ن = \int مم^ن طہ \ ف طہ$ ....(۱۴)

تو ثابت ہو سکتا ہے کہ $و_ن = -\frac{1}{ن-1} مم^{ن-1} طہ - و_{ن-2}$ ....(۱۵)

۴ - تحویلی ضابطے (مسلسل)۔

(۱) فرض کرو کہ $ع_ن = \int جم^ن طہ \ ف طہ$

تو $ع_ن = \int جم^{ن-1} طہ \ ف(جب طہ) = جب طہ جم^{ن-1} طہ$

$- \int جب طہ \times (ن-1) جم^{ن-2} طہ \times (-جب طہ) ف طہ$

$= جب طہ جم^{ن-1} طہ + (ن-1) \int (1-جم^2 طہ) جم^{ن-2} طہ \ ف طہ$

$ع_ن = جب طہ جم^{ن-1} طہ + (ن-1)(ع_{ن-2} - ع_ن)$

دوسری طرف لیجا کر ن پر تقسیم کرنے سے

$ع_ن = \frac{1}{ن} جب طہ جم^{ن-1} طہ + \frac{ن-1}{ن} ع_{ن-2}$ ......(۲)

اس ضابطہ کو متواتر استعمال کرنے سے ہر قدم پر قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے، اور آخر الامر اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تکملہ $ع_ن$ کی قیمت یا تو

$ع_1 = \int جم طہ \ ف طہ = جب طہ$ ....(۳)

پر یا $ع_0 = \int ف طہ = طہ$ ....(۴)

پر منحصر کیجا سکتی ہے بموجب اسکے کہ ن طاق یا جفت ہو۔

(۲) اسی طریقہ پر اگر $و_ن = \int جب^ن طہ \ ف طہ$ ....(۵)

تو $و_ن = -\frac{1}{ن} جم طہ جب^{ن-1} طہ + \frac{ن-1}{ن} و_{ن-2}$ .....(۶)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $و_ن$ کی قیمت

$و_1 =$ ∫جب طہ ز طہ = ۔جم طہ ....(۷)

یا $و_r =$ ∫ز طہ = طہ ....(۸)

پر لاکے منحصر کی جا سکتی ہے۔

(۳) یہی طریقہ عام تر شکل $ع_{م،ن} =$ ∫$جب^م$ طہ $جم^ن$ طہ ز طہ ......(۹)

کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

اب $ع_{م،ن} =$ ∫$جب^م$ طہ $جم^{ن-۱}$ طہ ز(جب طہ)

$= \frac{۱}{م+۱} جب^{م+۱}$ طہ $جم^{ن-۱}$ طہ $- \frac{۱}{م+۱}$ ∫$جب^{م+۱}$ طہ $\times$ (ن-۱) $جم^{ن-۲}$ طہ $\times$ (۔جب طہ) ز طہ

$= \frac{۱}{م+۱} جب^{م+۱}$ طہ $جم^{ن-۱}$ طہ $+ \frac{(ن-۱)}{(م+۱)}$ ∫$جب^م$ طہ $جم^{ن-۲}$ طہ (۱۔$جم^۲$ طہ) ز طہ

$= \frac{۱}{م+۱} جب^{م+۱}$ طہ $جم^{ن-۱}$ طہ $+ \frac{ن-۱}{م+۱} (ع_{م،ن-۲} - ع_{م،ن})$

کسر دور کرنے اور یک جنس رقموں کو اکٹھا کر کے (م + ن) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ع_{م،ن} = \frac{۱}{م+ن} جب^{م+۱}$ طہ $جم^{ن-۱}$ طہ $+ \frac{ن-۱}{م+ن} ع_{م،ن-۲}$ ......(۱۰)

اسی طریقہ سے حاصل ہوگا

$ع_{م،ن} = - \frac{۱}{م+ن} جب^{م-۱}$ طہ $جم^{ن+۱}$ طہ $+ \frac{م-۱}{م+ن} ع_{م-۲،ن}$ ......(۱۱)

۱۸۳ ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) کے متواتر استعمال سے ہر قدم پر کوئی قوت نما بقدر ۲ کے گھٹایا جا سکتا ہے اور بالآخر اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو تکملہ $ع_{م،ن}$ کی قیمت ذیل کے چار تکملات میں سے کسی ایک پر منحصر کی جا سکتی ہے۔

$ع_{۱،۱} =$ ∫جب طہ جم طہ ز طہ $= \frac{۱}{۲} جب^۲$ طہ ....(۱۲)

ع₁₁ = ∫ فرطہ = طہ .... (۱۳)

ع₁₂ = ∫ جم طہ فرطہ = جب طہ .... (۱۴)

ع₂₁ = ∫ جب طہ فرطہ = − جم طہ .... (۱۵)

ان دفعات کی تحقیقات کی بڑی اہمیت یہ ہے کہ انکی مدد سے محدود تکملات میں سے چند سادہ اور عملی طور پر نہایت مفید ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ دیکھو دفعہ

۴۳ — **منطق کسروں کا تکمل۔** جبری تفاعلوں کے تکمل پر اب پھر غور کیا جائیگا۔ ان تفاعلوں کی چند ایسی قسمیں ہیں جن پر عام طریقے عائد ہو سکتے ہیں۔ سب سے پہلے ہم منطق تفاعلوں پر غور کرینگے۔

منطق کسر فا(لا) / ف(لا) .... (۱) کسر واجب کہلاتی ہے شرط یہ ہے کہ فا کنندہ کے ابعاد نسب نما کے ابعاد سے کم ہوں۔ کوئی منطق کسر جس میں یہ شرط پوری نہ ہو تقسیم کے عمل سے منطق صحیح تفاعل اور کسر واجب کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے۔ اس لئے صرف کسر واجب کے تکمل پر غور کرنا کافی ہوگا۔

پس اگر ف(لا) ن ویں درجے کا کثیر الارقام ہو تو فرض کرو کہ

ف(لا) = لا^(ن) + پ₁ لا^(ن−۱) + پ₂ لا^(ن−۲) + ... + پ_(ن−۱) لا + پن ...... (۲)

یہ مان لیا جائیگا کہ فا(لا) کا درجہ زیادہ سے زیادہ (ن−۱) ہے۔ تکمل کو آسان کرنے کے لئے ہم (۱) کو جزوی کسور کے حاصل جمع میں تحویل کرتے ہیں اس تحویل کا امکان جبر و مقابلہ کے چند عام مسائل پر منحصر ہے جس کے ثبوت کے لئے اس مضمون کی خاص کتابیں دیکھنا چاہئیں *۔ لیکن طالب علم کو یہ معلوم ہو جائیگا کہ ان سادہ صورتوں کے لئے جو زیادہ تر استعمال میں آتی ہیں

* [کمل نظریہ کے لئے کرسٹل کا جبر و مقابلہ باب آٹھ دیکھو]

جبر ومقابلہ کے اس اصولی نظریہ پر حاوی ہونے کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ جو قاعدے اب دئے جائینگے ان سے حاصل کردہ نتیجوں کی تصدیق تجربہ سے بہ آسانی ہوسکتی ہے

۱۸۴ اول یہ فرض کرو کہ مساوات $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ .... (۳)

کی تمام اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہیں اور یہ $\text{عم}_{۱}$، $\text{عم}_{۲}$، $\text{عم}_{۳}$ ..... $\text{عم}_{\text{ن}}$ ہیں۔ تب کثیر الارقام $\text{ف}(\text{لا})$ درجۂ اول کے ن جداگانہ اجزائے ضربی میں تحویل ہوجاتا ہے یعنی

$$\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{عم}_{۱})(\text{لا} - \text{عم}_{۲})\ldots(\text{لا} - \text{عم}_{\text{ن}}) \ldots (۴)$$

اب یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اس صورت میں کسر (۱)، ن جزوی کسروں کے مجموعہ میں تحویل ہوجاتی ہے جن کے نسب نما $\text{ف}(\text{لا})$ کے مختلف اجزائے ضربی ہیں چنانچہ

$$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{عم}_{۱})(\text{لا} - \text{عم}_{۲})\ldots(\text{لا} - \text{عم}_{\text{ن}})} = \frac{\text{ا}_{۱}}{\text{لا} - \text{عم}_{۱}} + \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{لا} - \text{عم}_{۲}}$$

$$+ \frac{\text{ا}_{۳}}{\text{لا} - \text{عم}_{۳}} + \ldots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{عم}_{\text{ن}}} \ldots (۵)$$

جسمیں $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$، $\text{ا}_{۳}$ ..... $\text{ا}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں۔ اب اگر (۵) کو کسروں سے صاف کیا جائے اور دونوں طرف $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$، $\text{لا}^{\text{ن}-۲}$ ..... $\text{لا}^{۱}$، لا کے سر مساوی رکھے جائیں تو ن مستقل مقداروں کو دریافت کرنیکے لئے ٹھیک ن مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن ابھی یہ ثابت نہیں ہوا کہ زیر بحث شرائط ایک دوسرے سے آزاد اور باہم موافق ہیں، اور $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$ ..... $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی ایسی قیمتیں دریافت ہوسکتی ہیں جو (۵) کو پورا کریں اور نیز یہ مستقل وحید القیمت ہوں۔ تاہم دونوں منطق صحیح تفاعل جنہیں متماثلاً مساوی ثابت کرنا ہے بالترتیب $\text{لا} = \text{عم}_{۱}$، $\text{لا} = \text{عم}_{۲}$ ..... $\text{لا} = \text{عم}_{\text{ن}}$ کے لئے مساوی ہونگے بشرطیکہ

$$(۶)\ldots \begin{cases} \text{ا}_{۱}(\text{عم}_{۱} - \text{عم}_{۲})(\text{عم}_{۱} - \text{عم}_{۳})\ldots(\text{عم}_{۱} - \text{عم}_{\text{ن}}) = \text{فا}(\text{عم}_{۱}) \\ \text{ا}_{۲}(\text{عم}_{۲} - \text{عم}_{۱})(\text{عم}_{۲} - \text{عم}_{۳})\ldots(\text{عم}_{۲} - \text{عم}_{\text{ن}}) = \text{فا}(\text{عم}_{۲}) \\ \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن}}(\text{عم}_{\text{ن}} - \text{عم}_{۱})(\text{عم}_{\text{ن}} - \text{عم}_{۲})\ldots(\text{عم}_{\text{ن}} - \text{عم}_{\text{ن}-۱}) = \text{فا}(\text{عم}_{\text{ن}}) \end{cases} *$$

[* یہ دفعہ ۷۵ (۸) کی توسیع ہے]

یعنی $\text{ا}_{۱} = \frac{\text{فا}(\text{ع}_{۱})}{\text{ف}'(\text{ع}_{۱})}$ ، $\text{ا}_{۲} = \frac{\text{فا}(\text{ع}_{۲})}{\text{ف}'(\text{ع}_{۲})}$ ،..... ، $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{فا}(\text{ع}_{\text{ن}})}{\text{ف}'(\text{ع}_{\text{ن}})}$ ......(۷)

اب چونکہ (ن - ۱) درجہ کے دو منطق صحیح تفاعل لا کی (ن - ۱) سے زیادہ جداگانہ قیمتوں کے لئے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اُس صورت کے جبکہ وہ متماثلاً مساوی ہوں، اس لئے ثابت ہوا کہ مستقلوں کی ان قیمتوں کے لئے (۵) مساوات متماثلہ ہے - پس

$$\int \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}\,\text{ذلا} = \text{ا}_{۱}\,\text{لوک}(\text{لا}-\text{ع}_{۱}) + \text{ا}_{۲}\,\text{لوک}(\text{لا}-\text{ع}_{۲}) + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لوک}(\text{لا}-\text{ع}_{\text{ن}})$$ ....(۸)

مثال (۱) $\int \frac{\text{لا}^{۵}}{\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۴}$ ....(۹) کی قیمت دریافت کرو -

اب $$\frac{\text{لا}^{۵}}{\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۴} = \text{لا} + \frac{۵\,\text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا}}{\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۴}$$

$$= \text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}-۱} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}+۱} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}-۲} + \frac{\text{د}}{\text{لا}+۲}$$ ....(۱۰)

اگر کسور صاف کی جائیں اور سروں کو مساوی رکھا جائے تو ا، ب، ج، د کو دریافت کرنے کے لئے چار خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں - لیکن اوپر کا طریقہ استعمال کرنا آسان تر ہے اگر فرض کی ہوئی متماثلہ کو (لا - ۱) سے ضرب دیا جائے اور پھر اس میں لا = ۱ رکھ دیا جائے تو ا کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے اور اسی طرح باقی سروں کے لئے -

پس $$\frac{\text{لا}^{۵}}{\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۴} = \text{لا} - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{\text{لا}-۱} - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{\text{لا}-۲} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{\text{لا}+۲}$$ ....(۱۱)

اس نتیجہ کی بہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے -

اسلئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}(\text{لا}+۱) + \frac{۸}{۳}\,\text{لوک}(\text{لا}-۲)$

$+ \frac{۸}{۳}\,\text{لوک}(\text{لا}+۲)$ ....(۱۲)

مثال (۲) :- $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)}$ .... (۱۳) کی قیمت دریافت کرو۔

$\frac{1}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)}$ کو لا^2 کا تفاعل تصور کر کے

$$\frac{1}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)} = \frac{1}{\text{لا}^2} - \frac{1}{1+\text{لا}^2} \quad \text{............... (۱۴)}$$

جس سے $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)} = -\frac{1}{\text{لا}} - \text{ﺳﺲ}^{-1}\,\text{لا}$ .... (۱۵)

۸۴ـ مساوی اصلیں ـ

اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں حقیقی ہوں لیکن تمام جداگانہ نہ ہوں تو ر رتبہ والی اصل بہ کے جواب میں ف (لا) کا ایک جزو (لا ـ بہ)^{ر} ہوگا۔

جبر و مقابلہ کے نظریہ میں جس کا اوپر ذکر ہو چکا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اب دفعہ ۸۳ (۱) کے پھیلاؤ میں جزوی کسور کا متناظر سلسلہ یہ ہوگا

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{لا} - \text{بہ}} + \frac{\text{ب}_2}{(\text{لا} - \text{بہ})^2} + \frac{\text{ب}_3}{(\text{لا} - \text{بہ})^3} + \cdots + \frac{\text{ب}_{ر}}{(\text{لا} - \text{بہ})^{ر}} \quad \text{..... (۱)}$$

جس میں ب$_1$، ب$_2$، .... ب$_{ر}$ مستقل ہیں اور انکی قیمتیں سروں کو مساوی رکھنے کے طریقے سے یا کسی دوسرے طریقہ سے دریافت ہو سکتی ہیں۔

جملہ (۱) کا نامحدود تکملہ ہے

$$\text{ب}_1 \text{ لوگ } (\text{لا} - \text{بہ}) - \frac{\text{ب}_2}{\text{لا} - \text{بہ}} - \frac{1}{2} \times \frac{\text{ب}_3}{(\text{لا} - \text{بہ})^2} - \cdots - \frac{1}{ر - 1} \times \frac{\text{ب}_{ر}}{(\text{لا} - \text{بہ})^{ر-1}}$$

.... (۲)

مثال (۱) :- $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}^2(1-\text{لا})}$ .... (۳) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{1}{\text{لا}^2(1-\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ج}}{1-\text{لا}}$ .... (۴)

اگر طرفین کو (۱ - لا) سے ضرب دیں اور پھر لا = ۱ رکھ دیں تو حاصل ہوتا ہے ج = ۱
نیز لا^2 سے ضرب دیکر لا = ۰ رکھنے سے ب = ۱ دریافت ہوتا ہے۔ اب صرف
ا کی قیمت کسی اور طریقہ سے دریافت کرنا باقی ہے۔ اگر مساوات (۴) کے دونوں
جانب لا سے ضرب دیں اور لا ← ∞ کردیں تو حاصل ہوتا ہے ا - ج = ۰ یعنی
ا = ۱ ۔ اس کے متبادل طریقہ یہ ہے کہ کسر صاف کرنے کے بعد لا^2 کے سروں کو مساوی
رکھا جائے۔ نیز لا کو کوئی خاص قیمت دے سکتے ہیں مثلاً لا = -۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$-\text{ا} + \text{ب} + \frac{1}{2}\text{ج} = \frac{1}{2}$$

اور پہلے نتیجوں کی مدد سے ا = ۱ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{پس}\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1-\text{لا})} = \int \left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{1}{1-\text{لا}}\right)\text{فرلا}$$

$$= \text{لوک لا} - \frac{1}{\text{لا}} - \text{لوک}(1-\text{لا}) \quad \ldots\ldots(5)$$

مثال (۲)۔ $\int \frac{2\text{لا}+1}{(\text{لا}+2)(\text{لا}-3)^2}$ ....(۶) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{2\text{لا}+1}{(\text{لا}+2)(\text{لا}-3)^2} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}+2} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-3} + \frac{\text{ج}}{(\text{لا}-3)^2} \quad \ldots\ldots(7)$$

مستقلوں کے دریافت کرنے کے اجمالی طریقہ سے

$$\text{ا} = \frac{-4+1}{(-2-3)^2} = -\frac{3}{25}\ ،\quad \text{ج} = \frac{6+1}{2+3} = \frac{7}{5}$$

نیز لا سے ضرب دیکر لا ← ∞ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} + \text{ب} = 0 \quad \text{یعنی} \quad \text{ب} = \frac{3}{25}$$

$$\text{اور اسلئے تکملہ} = -\frac{3}{25}\,\text{لوک}(\text{لا}+2) + \frac{3}{25}\,\text{لوک}(\text{لا}-3) - \frac{7}{5(\text{لا}-3)} \quad \ldots(8)$$

مثال (۳)۔ $\int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+1)^2}$ ....(۹) کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۷۷ (۳) کی یاد دہانی کی جاتی ہے کہ $\frac{لا^2}{(لا^2+1)^2}$ کو لا^۲ کا تفاعل مانکر محض معائنہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{لا^2}{(لا^2+1)^2} = \frac{(لا^2+1)-1}{(لا^2+1)^2} = \frac{1}{لا^2+1} - \frac{1}{(لا^2+1)^2}$$

پس

$$\int \frac{لا^4\, فرلا}{(1+لا^2)^2} = \int \frac{لا\, فرلا}{1+لا^2} - \int \frac{لا\, فرلا}{(لا^2+1)^2} = \frac{1}{2}\, لوک\,(لا^2+1) + \frac{1}{2(لا^2+1)}$$

.... (۱۰)

۸۵ — دو درجی اجزائے ضربی ۔ مذکور بالا طریقے ہمیشہ استعمال ہو سکتے ہیں لیکن اگر ف (لا) = ۰ کی کچھ اصلیں خیالی ہوں تو اول تکملہ خیالی شکل میں حاصل ہو گا۔ اگر ہم خیالی جملوں پر غور کرنے سے بچنا چاہتے ہیں تو ذیل کے طریقے پر عمل کرنا چاہئے۔

۱۸۷ مساواتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) جسکے تمام سر حقیقی ہوں پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزا میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس تفاعل

$$\frac{فا(لا)}{ف(لا)} \quad ....(۱)$$

کو جزوی کسوروں میں تحویل کرنے کی ضمن میں ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

(ا) ہر خطی جزو لا - عا کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے $\frac{ا}{لا-عا}$ ....(۲)

(ب) ہر خطی جزو لا - با کے لئے جو م مرتبہ تکرار پاتا ہے م کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{ب_1}{لا-با} + \frac{ب_2}{(لا-با)^2} + \dots\dots + \frac{ب_م}{(لا-با)^م} \quad ....(۳)$$

(ج) ہر دو درجی جزو لا^۲ + پ لا + ق کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے

$$\frac{ج\, لا + د}{لا^2 + پ\, لا + ق} \quad ....(۴)$$

(۵) اور ہر دو درجی جزو $\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}$ کیلئے جو د مرتبہ تکرار پاتا ہے کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{\text{ج}_1\text{لا}+\text{د}_1}{\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق}} + \frac{\text{ج}_2\text{لا}+\text{د}_2}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^2} + \dots\dots + \frac{\text{ج}_\text{ر}\text{لا}+\text{د}_\text{ر}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{ر}} \quad \dots\dots(5)$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس طور پر مستقلات کی عین کافی تعداد حاصل ہوتی ہے تاکہ سروں کے باہم مساوی رکھنے کے طریقہ سے تفاعل (۱) کی جزوی کسور کے پورے نظام (۵) کے ساتھ مطابقت قائم ہو سکے۔

✻ اب صرف یہ غور کرنا باقی رہا ہے کہ جزوی کسر $\frac{\text{ج}_\text{س}\text{لا}+\text{د}_\text{س}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{س}}$ ......(۶)

کا نامحدود تکملہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ س = ۱ کی صورت پر دفعہ ۴۷ میں غور کیا جا چکا ہے اور عام صورت ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے اس شکل میں تحویل کی جا سکتی ہے سب سے پہلے ل اور م ایسے دریافت کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ج}_\text{س}\text{لا}+\text{د}_\text{س}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{س}} = \text{ل}\,\frac{2\text{لا}+\text{پ}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{س}} + \frac{\text{م}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{س}} \quad \dots(7)$$

یعنی $\text{ل} = \frac{1}{2}\text{ج}_\text{س}$ اور $\text{م} = \text{د}_\text{س} - \frac{1}{2}\text{پ}\,\text{ج}_\text{س}$ ....(۸)

نتیجہ (۷) کے دائیں جانب کی پہلی رقم کا تکملہ ہے

$$= \frac{\text{ل}}{(\text{س}-1)} \times \frac{1}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^{\text{س}-1}} \quad \dots\dots\dots\dots(9)$$

اور اب صرف ذیل کی قیمت معلوم کرنا باقی ہے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{پ لا}+\text{ق})^\text{س}} \quad \text{یا} \quad \int \frac{\text{فرت}}{(\text{ت}^2+\text{ج}^2)^\text{س}} \quad \dots\dots\dots(10)$$

[✻ ذیل کی بحث صرف مضمون کو مکمل کرنے کی غرض سے یہاں دی گئی ہے، عملی طور پر اس کے استعمال کی شاذونادر ضرورت پڑتی ہے۔ اس کو ملتوی رکھنے سے طالب علم کو کوئی نقصان نہیں ہوگا۔ (۱۰) کے نوع کے جملوں کو تکمل کرنے کا دوسرا طریقہ مثال (۲) میں آگے دیا گیا ہے]

جبکہ $ت = لا + \frac{۱}{۲} پ$ اور $ج = ق - \frac{۱}{۴} پ^۲$ .... (۱۱)

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ف}{فت}\left\{\frac{ت}{(ت^۲+ج)^{س-۱}}\right\} = \frac{۱}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} - (۲س-۲)\frac{ت^۲}{(ت^۲+ج)^{س}}$$

$$= \frac{۱}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} - (۲س-۲) \times \frac{(ت^۲+ج)-ج}{(ت^۲+ج)^{س}}$$

$$= \frac{-(۲س-۳)}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} + (۲س-۲) \times \frac{ج}{(ت^۲+ج)^{س}} \quad ......(۱۲)$$

پس تکمل کرنے سے

$$\frac{ت}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} = -(۲س-۳)\int\frac{فت}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} + (۲س-۲)ج\int\frac{فت}{(ت^۲+ج)^{س}}$$

یعنی

$$\int\frac{فت}{(ت^۲+ج)^{س}} = \frac{۱}{(۲س-۲)ج} \times \frac{ت}{(ت^۲+ج)^{س-۱}} + \frac{(۲س-۳)}{(۲س-۲)ج}\int\frac{فت}{(ت^۲+ج)^{س-۱}}$$

.... (۱۳)

اس لئے پہلی ترقیم پر واپس آنے سے

$$\int\frac{فلا}{(لا^۲+پلا+ق)^{س}} = \frac{۱}{۲(س-۱)(ق-\frac{۱}{۴}پ^۲)} \times \frac{لا+\frac{۱}{۲}پ}{(لا^۲+پلا+ق)^{س-۱}}$$

$$+ \frac{(۲س-۳)}{۲(س-۱)(ق-\frac{۱}{۴}پ^۲)}\int\frac{فلا}{(لا^۲+پلا+ق)^{س-۱}} \quad ....(۱۴)$$

اور یہی مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے۔ اس نتیجے کے متواتر استعمال سے تکملہ (۱۰) کی قیمت آخر میں

$$\int\frac{فلا}{لا^۲+پلا+ق} \quad ....(۱۵)$$

پر لا کے منحصر کی جا سکتی ہے اور اس تکملہ (۱۵) کی قیمت دفعہ ۵ ، سے معلوم ہے۔

مثال (۱) $\int\frac{فلا}{(لا^۴+لا^۲+۱)}$ .... (۱۶) کی قیمت دریافت کرو۔

نسب نما کے دو، درجہ دوم کے اجزا $(لا^۲ + لا + ۱)$، اور $(لا^۲ - لا + ۱)$ ہیں، اور ان کی مزید تحلیل نہیں ہو سکتی۔

اس لئے اوپر کے قاعدہ کے مطابق ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{لا^۴ + لا^۲ + ۱} = \frac{ا\,لا + ب}{لا^۲ + لا + ۱} + \frac{ج\,لا + د}{لا^۲ - لا + ۱} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

یعنی $۱ = (ا\,لا + ب)(لا^۲ - لا + ۱) + (ج\,لا + د)(لا^۲ + لا + ۱)$

لا کی مختلف قوتوں کے سر مساوی رکھنے سے

$$ا + ج = ۰،\quad -ا + ج + ب + د = ۰$$

$$ا + ج - ب + د = ۰ \quad \text{اور} \quad ب + د = ۱$$

پس $ا = -ج = \frac{۱}{۲}$ اور $ب = د = \frac{۱}{۲}$ .... (۱۸)

اب دفعہ ۵ کے طریقہ سے تکمل دریافت ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\int \frac{فرلا}{لا^۴ + لا^۲ + ۱} = \frac{۱}{۲}\int \frac{لا + ۱}{لا^۲ + لا + ۱}\,فرلا - \frac{۱}{۲}\int \frac{لا - ۱}{لا^۲ - لا + ۱}\,فرلا$$

$$= \frac{۱}{۴}\int \frac{(۲لا + ۱) + ۱}{لا^۲ + لا + ۱}\,فرلا - \frac{۱}{۴}\int \frac{(۲لا - ۱) - ۱}{لا^۲ - لا + ۱}\,فرلا$$

$$= \frac{۱}{۴}لوک(لا^۲ + لا + ۱) - \frac{۱}{۴}لوک(لا^۲ - لا + ۱) + \frac{۱}{۴}\int \frac{فرلا}{(لا + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}} + \frac{۱}{۴}\int \frac{فرلا}{(لا - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}}$$

$$= \frac{۱}{۴}لوک \frac{لا^۲ + لا + ۱}{لا^۲ - لا + ۱} + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left(سس^{-۱}\frac{۲لا + ۱}{\sqrt{۳}} + سس^{-۱}\frac{۲لا - ۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}لوک \frac{لا^۲ + لا + ۱}{لا^۲ - لا + ۱} + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\,سس^{-۱}\frac{\sqrt{۳}\,لا}{۱ - لا^۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

مثال (۲) $\int \frac{فرلا}{(۱ + لا^۲)^۲}$ .... (۲۰) کی قیمت دریافت کرو۔

نتیجہ (۱۴) کے مطابق اسکی قیمت دریافت ہو سکتی ہے لیکن ذیل کا طریقہ زیادہ آسان ہے۔
اگر $لا = سس\,ط$، رکھا جائے تو

$$\int \frac{فرلا}{(1+لا^2)^2} = \int جم^2 طہ\, فرطہ = \frac{1}{2}\int (1+جم 2طہ)\, فرطہ$$

$$= \frac{1}{2}طہ + \frac{1}{4}جب 2طہ = \frac{1}{2}\, سس^{-1} لا + \frac{1}{2} \times \frac{لا}{1+لا^2} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

۸۶ ـ غیر منطق تفاعلوں کا تکمل :- اس بارے میں ذیل کے نتیجے اہم ہیں

(آ) جبرہ تفاعلوں کی صورت میں جنمیں متغیر کی کسری قوتوں کے سوائے اور کوئی غیر منطق مقدار نہیں ہے ہم

$$لا = ت^م \quad اور \quad \frac{فرلا}{فرت} = م.ت^{م-1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

رکھ سکتے ہیں جہاں کسری قوت نماؤں کے نسب نما کا ذو اضعاف اقل م ہے اور سوال اس طور پر ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں بدل جاتا ہے ۔

(ٮ) لا اور ‌ی کا کوئی منطق تفاعل جہاں $ی = \sqrt{ا + ب لا} \quad \ldots\ldots (2)$ ۹۰

ابدال $ا + ب لا = ت^2$ اور $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{2ت}{ب} \ldots (3)$ کے ذریعہ تکمل ہو سکتا ہے ۔

پس $\int فا(لا، ی)\, فرلا = \int فا\left(\frac{ت^2 - ا}{ب}، ت\right) \frac{2ت\, فرت}{ب} \ldots\ldots (4)$

اور تکمل کی علامت کے اندر کا ت کا تفاعل منطق ہے ۔

مثال (۱) $\int \frac{لا\, فرلا}{1+\sqrt{لا}}$ کی قیمت دریافت کرو ۔

اگر لا = ت^۲ رکھیں تو

$$\int \frac{لا\, فرلا}{1+\sqrt{لا}} = 2\int \frac{ت^3\, فرت}{1+ت} = 2\int (ت^2 - ت + 1)\, فرت - 2\int \frac{فرت}{ت+1}$$

$$= \frac{2}{3}ت^3 - ت^2 + 2ت - 2\, لوگ(ت+1) = \frac{2}{3}لا^{\frac{3}{2}} - لا + 2\sqrt{لا} - 2\, لوگ(1+\sqrt{لا})$$

مثال (۲) $\int \frac{فرلا}{(۲+لا)\sqrt{۱+لا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$۱+لا = ت^۲$ اور $\frac{فرلا}{فرت} = ۲ت$ رکھنے سے

تکملہ $= \int \frac{۲ت\, فرت}{ت(۱+ت^۲)} = ۲\int \frac{فرت}{۱+ت^۲} = ۲مس^{-۱}ت = ۲مس^{-۱}\sqrt{۱+لا}$

(۳) اگر ی دو درجی جملے کے جذر کو ظاہر کرے تو فرض کرو کہ

$ی = \sqrt{ا لا^۲ + ب لا + ج}$

اور فا (لا، ی) متغیرات لا اور ی کا منطق تفاعل ہے تو تکملہ $\int$ فا (لا، ی) فرلا کی قیمت دریافت کرنے کا سوال ذیل کے ابدال سے منطق تفاعل کے تکملہ میں تحویل ہو سکتا ہے۔

اگر ا مثبت ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں $ی = \sqrt{ا} \times \sqrt{لا^۲ + پ لا + ق}$ ...(۶)

جس میں $پ = \frac{ب}{ا}$ اور $ق = \frac{ج}{ا}$ ۔ اب فرض کرو کہ

$\sqrt{لا^۲ + پ لا + ق} = ت - لا$

پس $لا = \frac{ت^۲ - ق}{۲ت + پ}$ اور $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{۲(ت^۲ + پ ت + ق)}{(۲ت + پ)^۲}$ .....(۷)

اور $\sqrt{لا^۲ + پ لا + ق} = \frac{ت^۲ + پ ت + ق}{۲ت + پ}$ ....(۸)

اس ابدال سے ظاہر ہے کہ سوال ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اگر $لا^۲ + پ لا + ق$ کے اجزا حقیقی ہیں تو فرض کرو

$لا^۲ + پ لا + ق = (لا - ع_۱)(لا - ب_۱)$ ....(۹)

تو ذیل کا ابدال بھی استعمال کر سکتے ہیں

$لا - ب_۱ = (لا - ع_۱)ت^۲$ ....(۱۰)

جس سے لا = ع۱ + (ب۱ - ع۱) / (۱ - ت^۲) اور فرلا / فرت = ۲(ب۱ - ع۱)ت / (۱ - ت^۲)^۲ ....(۱۱)

اور √(لا^۲ + پ لا + ق) = (لا - ع۱)ت = (ب۱ - ع۱)ت / (۱ - ت^۲) ......(۱۲)

اگر ا منفی ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

ک = √(-ا) × √(ق + پ لا - لا^۲) ....(۱۳)

جسمیں پ = - ب/ا اور ق = - ج/ا ۔ اگر جذر حقیقی ہے تو لازماً ق + پ لا - لا^۲ کے اجزاء ضربی حقیقی ہونے چاہئیں۔ ورنہ اسکی خلاف صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لئے اس جملہ کی علامت ایک ہی رہے گی اور ظاہر ہے کہ لا کی کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے یہ جملہ منفی ہے اس لئے اسکی قیمت ہمیشہ منفی ہوگی۔

پس ق + پ لا - لا^۲ = (لا - ع۱)(ب۱ - لا) ......(۱۴)

جس میں ع۱ اور ب۱ حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ

۱۹۰

ب۱ - لا = (لا - ع۱) ت^۲ ....(۱۵)

تو لا = ع۱ + (ب۱ - ع۱) / (۱ + ت^۲) اور فرلا / فرت = - ۲(ب۱ - ع۱)ت / (۱ + ت^۲)^۲ ....(۱۶)

اور √(ق + پ لا - لا^۲) = (لا - ع۱)ت = (ب۱ - ع۱)ت / (۱ + ت^۲) ....(۱۷)

اب ظاہر ہے کہ ان ابدالوں سے فا(لا، ک) فرلا / فرت متغیر ت کا منطق تفاعل ہو جاتا ہے۔

اوپر کی تحقیقات ایک حد تک اہمیت رکھتی ہے کیونکہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خاص شکل کے تفاعل تکمل ہو سکتے ہیں، اور ان سے خاص قسم کے نتیجے حاصل ہوتے ہیں لیکن خاص خاص صورتوں میں عملی طور پر تکمل دیگر طریقوں سے آسانی سے عمل میں آسکتا ہے*۔

[* دفعہ ۷۶، ۷۷، اور ۹۷ کے طریقے خاص طور پر دیکھو]

اس باب کے دوران میں ایسی کئی مثالیں آچکی ہیں۔ اور نمونے کے طور پر ایک اور دو مثالیں یہاں دی جاتی ہیں۔

مثال (۳)۔ نسب نما کو ناطق بنانے سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+\sqrt{\text{لا}}} = \int \left\{ \sqrt{\text{۱}+\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}} \right\} \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۲}}{\text{۳}}(\text{۱}+\text{لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} - \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$$

مثال (۴)۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}}} = \int \left\{ \text{لا} - \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}} \right\} \text{فرلا}$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} - \int \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}}\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جم}^{-\text{۱}}\text{لا}$$

بطرز دیگر $\text{لا} = \text{جمز ع}$ رکھنے سے تکملہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\int \frac{\text{جسز ع فرع}}{\text{جمز ع}+\text{جسز ع}} = \int \text{قو}^{-\text{ع}}\,\text{جسز ع فرع}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int (\text{۱}-\text{قو}^{-\text{۲ع}})\,\text{فرع} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ع} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{قو}^{-\text{۲ع}}$$

اور آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دونوں نتیجوں میں صرف مستقل کا فرق ہے۔

امثلہ ۲۳

ذیل کے جملوں کے نامحدود تکملات دریافت کرو اور تفرق کر کے انکی تصدیق کرو۔

(۱) $\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\text{لا}}$ ، $\frac{\text{۱}}{(\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲}}}$　　(۲) $\frac{\text{۱}}{\text{۲لا}-\text{۱}}$ ، $\frac{\text{۱}}{(\text{۲لا}-\text{۱})^{\text{۲}}}$

(۳) $(\text{لا}-\text{۱})^{\text{۲}}$ ، $\frac{\text{۱}}{(\text{لا}-\text{۱})^{\text{۲}}}$ ،　　(۴) $\sqrt{\text{لا}}$ ، $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}}}$ ، $\frac{\text{لا}+\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}}}$

(۵) $\frac{1}{\sqrt{\text{۲+لا}}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{\text{۲−۲لا}}}$ (۶) $\frac{\text{۱+لا}}{\text{لا}}$ ، $\frac{\text{۱+لا}}{\text{لا}^2}$

(۷) $\frac{\text{۱−۲لا}}{\text{۳+لا}}$ ، $\frac{\text{۲+لا}}{\text{۳−لا}}$ (۸) $(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}})^2$ ، $(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}})^3$

(۹) $\frac{\text{۱+لا}}{\text{۱−لا}}$ ، $\frac{\text{۱−لا}}{\text{۱+لا}}$ (۱۰) $\frac{\text{لا}^2}{\text{۱+لا}}$ ، $\frac{\text{لا}^2}{\text{۱−لا}}$

(۱۱) $\frac{\text{۱−لا}^2}{\text{۱+لا}^2}$ ، $\frac{\text{۱+لا}^2}{\text{۱−لا}^2}$ (۱۲) $\text{جم}^2\text{لا}$ ، $\text{مم}^2\text{لا}$

(۱۳) $(\text{جم لا − جب لا})^2$ (۱۴) $\text{جمز}^2\text{لا}$ ، $\text{جبز}^2\text{لا}$

(۱۵) $\text{مسز}^2\text{لا}$ ، $\text{ممز}^2\text{لا}$ (۱۶) $\frac{\text{۱−لا}^{\text{م}}}{\text{۱−لا}}$ ، $\frac{\text{۱+لا}^{\text{۲م+۱}}}{\text{۱+لا}}$

اسئلہ ۲۴

حرکیاتی سوالات

(۱) ایک ذرہ قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع − ج ت}$ کے مطابق حرکت کررہا ہے۔ ثابت کروکہ ساکن ہونے سے پہلے وہ فاصلہ $\frac{\text{ع}^2}{\text{۲ج}}$ طے کریگا۔ (ج اسراع بجاذبہ ارض)

(۲) اگر ایک نقطہ سکون سے وقت ت = ۰ پر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت شروع کرے اور کسی وقفہ کے بعد اسکی رفتار و_1 ہو اور اس وقفہ کے اندر اوسط رفتار $\bar{\text{و}}$ ہو تو ثابت کروکہ $\bar{\text{و}} = \frac{1}{2}\text{و}_1$

(۳) سوال (۲) کی ترمیم میں اگر اسراع $\text{ت}^{\text{ن}}$ کے متناسب ہو تو

$$\bar{\text{و}} = \frac{1}{\text{ن+۲}} \times \text{و}_1$$

(۴) ایک ذرہ کی حرکت کا قانون $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و جم ن ت}$ ہے۔ ثابت کروکہ

ت = ۰ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{و}{ن}$ طے ہوگا۔

(۵) اگر مزاحم واسطہ میں متحرک ذرہ کی رفتار $\frac{فرس}{فرت} = و \cdot قو^{-ک ت}$ ہو تو ثابت کرو کہ ذرہ وقت ت = ۰ کے مقام سے فاصلہ $\frac{و}{ک}$ کبھی طے نہیں کر سکتا۔

(۶) ایک ذرہ قانون $\frac{فرس}{فرت} = و \cdot قو^{-ک ت}$ جم ن ت کے مطابق حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت = ۰ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{ن قو^{-ک \frac{\pi}{۲ن}} + ک}{ن^۲ + ک^۲}$ و طے کرتا ہے۔

(۷) ثابت محور کے گرد گھومنے والے جسم کی زاوی رفتار $\frac{فرطہ}{فرت} = ۲ ن فطہ ن ت$ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر طہ = ۰ بوقت ت = ۰ تو طہ = ۴ $سں^{-۱}$ $قو^{ن ت}$ − π

امثلہ ۲۵

(درجہ دوم کے نسب نما)

(۱) $\int \frac{۱ + لا}{۱ + لا^۲} فرلا = سں^{-۱} لا + لوک_ہ \sqrt{۱ + لا^۲}$

(۲) $\int \frac{لا^۳}{۱ + لا^۲} فرلا = \frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک_ہ \sqrt{۱ + لا^۲}$

(۳) $\int \frac{لا^۳}{۱ - لا^۲} فرلا = - \frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک_ہ \sqrt{۱ - لا^۲}$

(۴) $\int \frac{فرلا}{۱ - ۲لا + ۲لا^۲} = سں^{-۱} (۲لا - ۱)$

(۵) $\int \frac{فرلا}{۱ + ۳لا + ۲لا^۲} = لوک \frac{۲لا + ۱}{لا + ۱}$

(۶) $\int \frac{\text{۳لا} + \text{۷}}{\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۳لا} + \text{۵}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\ \text{لوک}(\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۳لا} + \text{۵}) + \frac{\text{۳۷}}{\text{۲}\sqrt{\text{۳۱}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{۴لا} - \text{۳}}{\sqrt{\text{۳۱}}}$

(۷) $\int \frac{\text{۲لا} - \text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲لا} + \text{۳}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲لا} + \text{۳}) - \frac{\text{۳}}{\sqrt{\text{۲}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{لا} + \text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}$

(۸) $\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} + \text{۱}}\ \text{فرلا} = \text{لا} + \text{لوک}(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} + \text{۱}) + \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۳}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{۲لا} - \text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$

(۹) $\int \frac{\text{لا} + \text{۱}}{(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}(\text{لا} - \text{۱}) - \frac{\text{۲}}{\text{لا} - \text{۱}}$

(۱۰) $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۶لا} + \text{۸}} = \text{لوک} \frac{(\text{لا} + \text{۴})^{\text{۲}}}{\text{لا} + \text{۲}}$

(۱۱) $\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}{(\text{لا} - \text{۲})(\text{لا} - \text{۳})}\ \text{فرلا} = \text{لا} - \text{۳}\ \text{لوک}(\text{لا} - \text{۲}) + \text{۸}\ \text{لوک}(\text{لا} - \text{۳})$

(۱۲) $\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} - \text{۱}}\ \text{فرلا} = \text{لا} + (\frac{\text{۳}}{\sqrt{\text{۵}}} + \text{۱})\ \text{لوک}(\text{۲لا} - \sqrt{\text{۵}} - \text{۱}) - (\frac{\text{۳}}{\sqrt{\text{۵}}} - \text{۱})\ \text{لوک}(\text{۲لا} + \sqrt{\text{۵}} - \text{۱})$

(۱۳) $\int \frac{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲م}}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{\text{۵}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{۲م} - \text{۱}}\ \text{لا}^{\text{۲م} - \text{۱}}$

(۱۴) $\int \frac{\text{۱} - (-\text{۱})^{\text{م}}\ \text{لا}^{\text{۲م}}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\text{لا}^{\text{۵}} - \cdots + (-\text{۱})^{\text{م} - \text{۱}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲م} - \text{۱}} \times \text{لا}^{\text{۲م} - \text{۱}}$

امثلہ ۲۶

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۲} - \text{۳لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\ \text{جب}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}\ \text{لا}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۲} + \text{۳لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\ \text{جبز}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}\ \text{لا}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{۱} - \text{لا})}} = \text{جب}^{-\text{۱}}(\text{۲لا} - \text{۱})$

(۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا(لا+۱)}}} = \text{جمز}^{-1}(\text{۲لا+۱})$

(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا(لا-۱)}}} = \text{جمز}^{-1}(\text{۲لا-۱})$

(۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱+۲لا+۳لا}^{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{جیز}^{-1} \frac{\text{۳لا+۱}}{\sqrt{2}}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱+۲لا-۳لا}^{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{جب}^{-1} \frac{\text{۳لا-۱}}{2}$

(۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۲ار لا - لا}^{2}}} = \text{جم}^{-1}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ار}}\right)$

(۹) $\int \sqrt{\frac{\text{ار - لا}}{\text{لا}}}\ \text{فرلا} = \sqrt{\text{لا(ار - لا)}} + \frac{\text{ار}}{2}\ \text{جب}^{-1} \frac{\text{۲لا - ار}}{\text{ار}}$

(۱۰) $\int \sqrt{\frac{\text{۱+لا}}{\text{۱-لا}}}\ \text{فرلا} = \text{جب}^{-1}\text{لا} - \sqrt{\text{۱-لا}^{2}}$

(۱۱) $\int \sqrt{\frac{\text{لا+۱}}{\text{لا-۱}}}\ \text{فرلا} = \sqrt{\text{لا}^{2}-1} + \text{جمز}^{-1}\text{لا}$

امثلہ ۲۷

تغیر کی تبدیلی

(۱) $\int \frac{\text{لا}^{2}\text{فرلا}}{\text{۱ - لا}^{3}} = \frac{1}{3}\ \text{لوک} \frac{1}{\text{۱ - لا}^{3}}$ (۱ - لا^{3})

(۲) $\int \frac{\text{لا}^{2}\text{فرلا}}{\text{۱ - لا}^{6}} = \frac{1}{6}\ \text{لوک} \frac{\text{۱+لا}^{3}}{\text{۱-لا}^{3}}$ ، $\int \frac{\text{لا}^{2}\text{فرلا}}{\text{۱ + لا}^{6}} = \frac{1}{3}\ \text{مس}^{-1}\text{لا}^{3}$

(۳) $\int \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}(\text{لوک لا})^{2}$

(۴) ∫ جب لا جم لا فرلا = ½ جب^۲ لا

(۵) ∫ (جب^{-۱} لا) / √(۱ - لا^۲) فرلا = ½ (جب^{-۱} لا)^۲

(۶) ∫ جم لا / (۱ + جب لا) فرلا = لوک (۱ + جب لا)،

∫ جب لا فرلا / (ا + ب جم لا) = - ۱/ب لوک (ا + ب جم لا)

(۷) ∫ جب لا جم^۳ لا فرلا = - ¼ جم^۴ لا

(۸) ∫ جب لا جم لا / (ا جم^۲ لا + ب جب^۲ لا) فرلا = ۱ / ۲(ب - ا) لوک (ا جم^۲ لا + ب جب^۲ لا)

(۹) ∫ مس^۳ لا فرلا = ½ مس^۲ لا + لوک جم لا

(۱۰) ∫ جب لا / جم^۵ لا فرلا = ¼ قط^۴ لا

(۱۱) ∫ قط^۴ لا فرلا = مس لا + ⅓ مس^۳ لا

(۱۲) ∫ (قط لا + مس لا) فرلا = لوک ۱ / (۱ - جب لا)،

∫ (قط لا - مس لا) فرلا = لوک (۱ + جب لا)

(۱۳) ∫ فرلا / (۱ + جم لا) = قم لا - مم لا ، ∫ فرلا / (۱ - جم لا) = - مم لا - قم لا

(۱۴) ∫ فرلا / (۱ + جب لا) = مس لا - قط لا ، ∫ فرلا / (۱ - جب لا) = مس لا + قط لا

۱۹۶

(۱۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{2}\text{لا جم}^{2}\text{لا}} = \text{مس لا} - \text{مم لا}$$

(۱۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم}^{2}\text{لا}} = \text{قط لا} + \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{2}$$

(۱۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم}^{3}\text{لا}} = \frac{1}{2}\,\text{قط}^{2}\text{لا} + \text{لوک مس لا}$$

(۱۸) $$\int \frac{\text{فرلا}}{1 + \text{مس لا}} = \frac{1}{2}\,\text{لا} + \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{جم لا} + \text{جب لا})$$

(۱۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{1 + \text{جم}^{2}\text{لا}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس لا}\right)$$

(۲۰) $$\int \text{لا}\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}\;\text{فرلا} = \frac{1}{3}\,(\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}}$$

(۲۱) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\,(\text{لا}^{\text{ن}} + 1)} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} + 1}$$

(۲۲) زاویہی ابدالوں سے $\int \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}}\;\text{فرلا}$ اور $\int \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}\;\text{فرلا}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2}\sqrt{\text{لا}^{2} + 1}} = -\,\frac{\sqrt{1 + \text{لا}^{2}}}{\text{لا}}$$

(۲۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2}\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}} = -\,\frac{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}{\text{ا}^{2}\,\text{لا}}$$

(۲۵) $$\int \frac{\text{لا}^{3}\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}} = \frac{1}{3}\,(\text{لا}^{2} - 2\text{ا}^{2})\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}$$

امثلہ ۲۸
تکمل بالحصص

(۱) $\int \text{لا}\ \text{ھو}^{\text{لا}}\ \text{فرلا} = (\text{لا} - ۱)\ \text{ھو}^{\text{لا}}$

(۲) $\int \text{لا لوک لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا}^{۲} \left(\text{لوک لا} - \frac{۱}{۲}\right)$

(۳) $\int \text{لا}^{\text{م}}\ \text{لوک لا فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+۱}}{\text{م}+۱} \left(\text{لوک لا} - \frac{۱}{\text{م}+۱}\right)$

(۴) $\int \text{لا جب لا فرلا} = -\ \text{لا جم لا} + \text{جب لا}$

(۵) $\int \text{لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$

(۶) $\int \text{لا جب لا جم لا فرلا} = -\frac{۱}{۴}\ \text{لا جم ۲لا} + \frac{۱}{۸}\ \text{جب ۲لا}$

(۷) $\int \text{جم م لا جم ن لا فرلا} = \frac{\text{م جب م لا جم ن لا} - \text{ن جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۸) $\int \text{جب م لا جب ن لا فرلا} = \frac{\text{ن جب م لا جم ن لا} - \text{م جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۹) $\int \text{جب م لا جم ن لا فرلا} = -\frac{\text{م جم م لا جم ن لا} + \text{ن جب م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۱۰) $\int \text{جب}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا جب}^{-۱}\ \text{لا} + \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

(۱۱) $\int \text{مس}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا مس}^{-۱}\ \text{لا} - \text{لوک} \sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}$

(۱۲) $\int \text{قط}^{-۱}\ \text{لا فرلا} = \text{لا قط}^{-۱}\ \text{لا} - \text{جمز}^{-۱}\ \text{لا}$

(۱۳) $\int \text{لا}\ \text{سس}^{-1}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}(1+\text{لا}^2)\ \text{سس}^{-1}\text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}$

(۱۴) $\int \text{لا}\ \text{قط}^2\text{لا}\ \text{فرلا} = \text{لا}\ \text{سس لا} + \text{لوک جم لا}$

(۱۵) $\int \frac{\text{لا} + \text{جب لا}}{1 + \text{جم لا}}\ \text{فرلا} = \text{لا}\ \text{سس}\ \frac{\text{لا}}{2}$

(۱۶) $\int \frac{\text{لا}\ \text{جب}^{-1}\text{لا}\ \text{فرلا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}} = -\sqrt{1-\text{لا}^2}\ \text{جب}^{-1}\text{لا} + \text{لا}$

(۱۷) $\int \text{جمز لا جم لا فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جبز لا جم لا} + \text{جمز لا جب لا})$

(۱۸) $\int \text{جبز لا جب لا فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جمز لا جب لا} - \text{جبز لا جم لا})$

(۱۹) $\int \text{جمز لا جب لا فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جبز لا جب لا} - \text{جمز لا جم لا})$

(۲۰) $\int \text{جبز لا جم لا فرلا} = \frac{1}{2}(\text{جمز لا جم لا} + \text{جبز لا جب لا})$

(۲۱) $\int \text{فو}^{\text{لا}}\ \text{جب لا جم لا فرلا} = \frac{1}{10}(\text{جب ۲ لا} - \text{۲ جم ۲ لا})\ \text{فو}^{\text{لا}}$

(۲۲) $\int \text{لا}^5\ \text{فو}^{-\text{لا}}\ \text{فرلا} = -(\text{لا}^5 + 5\text{لا}^4 + 20\text{لا}^3 + 60\text{لا}^2 + 120\text{لا} + 120)\ \text{فو}^{-\text{لا}}$

(۲۳) $\int \text{لا}^4\ \text{جب لا فرلا} = -(\text{لا}^4 - 12\text{لا}^2 + 24)\ \text{جم لا} + (4\text{لا}^3 - 24\text{لا})\ \text{جب لا}$

(۲۴) اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{جمز لا فرلا}$ اور $\text{و}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{جبز لا فرلا}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{جبز لا} - \text{ن}\ \text{و}_{\text{ن}-1}$ اور $\text{و}_{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{جمز لا} - \text{ن}\ \text{ع}_{\text{ن}-1}$

اس کی مدد سے ع_4 اور و_4 کی قیمتیں دریافت کرو

[$\text{ع}_4 = (\text{لا}^4 + 12\text{لا}^2 + 24)\ \text{جبز لا} - (4\text{لا}^3 + 24\text{لا})\ \text{جمز لا}$

$\text{و}_4 = (\text{لا}^4 + 12\text{لا}^2 + 24)\ \text{جمز لا} - (4\text{لا}^3 + 24\text{لا})\ \text{جبز لا}$]

(۲۵) اگر ع متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

$$\int فو^{لا} \times ع \, فر لا = \frac{فو^{لا}}{لو} \left(ا - \frac{عف}{لو} + \frac{عف^{۲}}{لو^{۲}} - \ldots \right) ع \quad \text{جہاں} \quad عف = \frac{فر}{فر لا}$$

(۲۶) سروں ا اور ب کی قیمت دریافت کرو کہ

$$\int \frac{فر لا}{(ا + ب \, جم \, لا)^{۲}} = \frac{ا \, جب \, لا}{ا + ب \, جم \, لا} + ب \int \frac{فر لا}{ا + ب \, جم \, لا}$$

$$\left[ا = \frac{- ب}{ا^{۲} - ب^{۲}} ، \; ب = \frac{ا}{ا^{۲} - ب^{۲}} \right]$$

۱۹۸

امثلہ ۲۹

(منطق کسور)

(۱) $$\int \frac{فر لا}{لا (ا - لا^{۲})} = لوک \frac{لا}{\sqrt{ا - لا^{۲}}}$$

(۲) $$\int \frac{۲ لا + ۳}{لا (لا - ۱)(لا + ۲)} فر لا = لوک \frac{(لا - ۱)^{\frac{۵}{۳}}}{لا^{\frac{۳}{۲}} (لا + ۲)^{\frac{۱}{۶}}}$$

(۳) $$\int \frac{لا^{۲} \, فر لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)} = \frac{۱}{۲} لوک (لا - ۱) - ۴ \, لوک (لا - ۲) + \frac{۹}{۲} لوک (لا - ۳)$$

(۴) $$\int \frac{۲ لا - ۳}{(لا^{۲} - ۱)(۲ لا + ۳)} فر لا = \frac{۵}{۲} لوک (لا + ۱) - \frac{۱}{۱۰} لوک (لا - ۱) - \frac{۱۲}{۵} لوک (۲ لا + ۳)$$

(۵) $$\int \frac{لا \, فر لا}{لا^{۴} - لا^{۲} - ۲} = \frac{۱}{۶} لوک \frac{لا^{۲} - ۲}{لا^{۲} + ۱}$$

(۶) $$\int \frac{فر لا}{لا^{۳} + ۳ لا^{۲} - ۴} = \frac{۱}{۳ (لا + ۲)} + \frac{۱}{۹} لوک \frac{لا - ۱}{لا + ۲}$$

(۷) $$\int \frac{لا^{۲} \, فر لا}{(لا - ا)(لا - ب)(لا - ج)} = \frac{ا^{۲}}{(ا - ب)(ا - ج)} لوک (لا - ا)$$

$$+\frac{\text{ب}^2 \,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ج}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$$

(۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{۱}{\text{ب}^2-\text{ا}^2}\left(\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{سس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\frac{۱}{\text{ب}}\,\text{سس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۹) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{۱}{۲(\text{ب}^2-\text{ا}^2)}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2+\text{ا}^2}{\text{لا}^2+\text{ب}^2}$$

(۱۰) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{۱}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\left(\text{ا}\,\text{سس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\text{ب}\,\text{سس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۱۱) $$\int\frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{۱}{۲(\text{ا}^2-\text{ب}^2)}\left\{\text{ا}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ا}^2)-\text{ب}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ب}^2)\right\}$$

(۱۲) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+۱)(\text{لا}+۲)^2}=-\frac{۲}{\text{لا}+۲}+\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+۲}{\text{لا}+۱}$$

(۱۳) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+۱)(\text{لا}+۲)^2}=\frac{۴}{\text{لا}+۲}+\text{لوک}\,(\text{لا}+۱)$$

(۱۴) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^3-\text{لا}^2-\text{لا}+۱}=\frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\text{لا}-۱}$$

(۱۵) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-۱)^2}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-۱}+\frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}$$

(۱۶) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(۱-\text{لا})^2}=\frac{۲\text{لا}-۱}{\text{لا}(۱-\text{لا})}+۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{۱-\text{لا}}$$

(۱۷) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-۱)^2}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-۱}-\frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}$$

(۱۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(\text{لا}^2-۱)^2}=-\frac{۳}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱}-\frac{۱}{\text{لا}}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-۱}$$

(۱۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۳}(\text{لا}+۱)} = -\frac{۱}{۲\,\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\text{لا}} - \text{لوک}\,(\text{لا}+۱) + \text{لوک}\,\text{لا}$$

(۲۰) $$\int \frac{۳\,\text{لا}+۲}{\text{لا}(\text{لا}+۱)^{۳}}\,\text{فرلا} = ۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{لا}+۱} + \frac{۲}{\text{لا}+۱} - \frac{۱}{۲(\text{لا}+۱)^{۲}}$$

(۲۱) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۳}} = \frac{۳}{۱۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۳}{۸}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^{۲}-۱} - \frac{۱}{۴}\times\frac{\text{لا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۲}}$$

(۲۲) $$\int \frac{۱+\text{لا}}{\text{لا}(۱+\text{لا}^{۲})}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} + \text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۴) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{(۱+\text{لا})^{۲}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۶) $$\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}}{(۱+\text{لا})^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}^{۲}) + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۸) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}) + \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(۱+\text{لا}^{۲}) - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۹) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+\text{لا}^{۲}-۲} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{\sqrt{۲}}{۳}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۲}}$$

(۳۰) $$\int \frac{\text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۳\,\text{لا}^{۲}+۲} = \text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۲) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۱)$$

(۳۱) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{لا}^{۲}+۱)} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۱) - \frac{۱}{۲(\text{لا}-۱)}$$

(۳۲) $$\int \frac{\text{لا}^2-1}{\text{لا}^4+\text{لا}^2+1}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2-\text{لا}+1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}$$

(۳۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^4(1+\text{لا}^2)} = \text{مس}^{-1}\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{3\,\text{لا}^3}$$

(۳۴) $$\int \frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^3} = -\frac{1+2\,\text{لا}^2}{4(1+\text{لا}^2)^2}$$

(۳۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)^2} = -\frac{2+3\,\text{لا}^2}{2\,\text{لا}(1+\text{لا}^2)} - \frac{3}{2}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}$$

(۳۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{1+\sqrt{2}\,\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\sqrt{2}\,\text{لا}+\text{لا}^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{2}\,\text{لا}}{1+\text{لا}^2}$$

(۳۷) $$\int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{1+\text{لا}^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2-\sqrt{2}\,\text{لا}+1}{\text{لا}^2+\sqrt{2}\,\text{لا}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{2}\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}$$

امثلہ ۳۰

(غیر منطق تفاعل)

(۱) $$\int \text{لا}\sqrt{1+\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{2}{5}(1+\text{لا})^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+\text{لا})^{\frac{3}{2}}$$

(۲) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}+\text{ا}}+\sqrt{\text{لا}+\text{ب}}} = \frac{2}{3(\text{ا}-\text{ب})}\left\{(\text{لا}+\text{ا})^{\frac{3}{2}} - (\text{لا}+\text{ب})^{\frac{3}{2}}\right\}$$

(۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}-1} = 2\sqrt{\text{لا}} + 2\,\text{لوک}\,(\sqrt{\text{لا}}-1)$$

(۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا})\sqrt{\text{لا}}} = \text{لوک}\, \frac{\text{۱}+\sqrt{\text{لا}}}{\text{۱}-\sqrt{\text{لا}}} = \text{۲ مق}^{-\text{۱}} \sqrt{\text{لا}}$$

(۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = \sqrt{\text{۲}}\ \text{مسن}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۲}}}$$

(۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا})\sqrt{\text{۱}-\text{لا}}} = \sqrt{\text{۲}}\ \text{مسن}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۱}-\text{لا}}{\text{۲}}}$$

(۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}) - \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۳}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{۲}\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}+\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$$

(۸) $$\int \frac{\sqrt{\text{لا}}}{\text{لا}-\text{۱}}\,\text{فرلا} = \text{۲}\sqrt{\text{لا}} + \text{لوک}\, \frac{\sqrt{\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = \text{لوک}\, \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۱۰) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = -\frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}{\text{لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لوک}\, \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۱۱) $$\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{جبز}^{-\text{۱}}\,\text{لا}$$

(۱۲) $$\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}} = -\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}} + \text{جبز}^{-\text{۱}}\,\text{لا}$$

(۱۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\ \text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}}$$

(۱۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}\ \text{لوک}\, \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}+\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}-\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا}}$$

ساتواں باب
محدود تکملے

۸۷ - تمہید - رقبوں کا سوال - تکمل کے سوال کا جو مفہوم اب ہم بیان کرینگے اس کے لحاظ سے یہ سوال بہت قدیم ہے لیکن اس کے حل کا عام طریقہ حال میں ہی نیوٹن اور لیب نیز کے وقت میں حاصل ہوا۔ اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں اس طریقہ کو منطقی تفصیلات میں جانے کے بغیر مختصر طور پر بیان کیا جائیگا اور یہ مان لیا جائیگا کہ "رقبوں کا سوال" کافی طور پر اس طریقہ کی تمثیلی صورت ہے۔ اس طرح اصل اصول آسانی سے سمجھ میں آجائیگا۔ اسکے بعد دفعات ۸۹ تا ۹۴ میں اس سوال پر نئے سرے سے زیادہ عام اور دقیق نقطۂ نظر سے بحث کی جائے گی۔

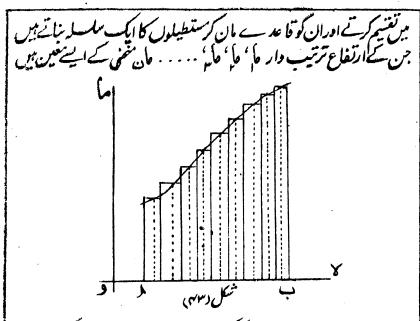
فرض کرو کہ وہ رقبہ* دریافت کرنا مطلوب ہے جو مسلسل منحنی

ما = فما (لا) .... (۱)

محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ تعیین کی خاطر یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ ما، لا کی سعت زیر بحث میں مثبت ہے اور ب > ا۔ اس سعت ب - ا کو ہم ذیلی حصوں ھ۱، ھ۲، ..... ھن

* اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں لفظ "رقبہ" کو عام وجدانی یا عقلی مفہوم کے مطابق لیا جائے گا جدید نقطہ نظر سے رقبہ کی نئی تعریف ضروری ہے۔ دیکھو دفعہ ۹۹۔

میں تقسیم کرتے اور ان کو قاعدے مان کر مستطیلوں کا ایک سلسلہ بناتے ہیں
جن کے ارتفاع ترتیب وار ما_1، ما_2، ما_3 ...... ما_n منحنی کے ایسے معین ہیں

شکل (۴۳)

جنہیں مختلف قاعدوں کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے منحنی تک کھینچا گیا ہے
اس طور پر جو مستطیل بنائے جائیں ان کے رقبوں کا مجموعہ رقبہ مطلوبہ کا ایک
تقرب ہوگا۔ ممکن ہے کہ یہ تقرب رقبہ کو صحیح طور پر تعبیر کرے لیکن
یہ ظاہر ہے کہ ذیلی حصوں ھ_1، ھ_2، ھ_3 ...... ھ_n کو جتنا چھوٹا لیا جائیگا
یعنی تقسیم کے حصوں کی متناظر تعداد جسقدر زیادہ ہوگی اتنا ہی یہ تقرب بہتر ہوگا۔
ان مستطیلوں کے مجموعہ کی انتہا جبکہ حصوں کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے مطلوبہ
رقبہ ہوگا۔

احصاء کی ایجاد سے پہلے اسی طرح کا عمل یا اسکے مرادف کوئی اور عمل ہر
منحنی کے لئے بشرط امکان الگ طور پر کیا جاتا تھا، اکثر اوقات یہ طریقے نہایت
فہیم اور خوش فکر ہوا کرتے تھے۔ ذیل کی مثالیں بطور توضیح کے دیجاتی ہیں۔

مثال ۱۔ جو رقبہ مکافی $\text{ما} = \text{لا}^2$، محور لا اور معینوں لا = ۰، لا = ب کے
درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔

شکل ۴۴

رکھو $ھ_۱ = ھ_۲ = ھ_۳ = \cdots = ھ_ن = ھ$ تو

$$ما_۱ = ا^۲ ،\ ما_۲ = (ا + ھ)^۲ \ ما_۳ = (ا + ۲ھ)^۲ ، \ldots\ ما_ن = \{ا + (ن-۱)ھ\}^۲$$

ہمیں ذیل کے مجموعہ پر غور کرنا ہے

$$ا^۲ھ + (ا+ھ)^۲ھ + (ا+۲ھ)^۲ھ + \ldots + \{ا + (ن-۱)ھ\}^۲ ھ$$

$$= ن ا^۲ھ + ۲\{۱ + ۲ + \ldots + (ن-۱)\} اھ^۲ + \{۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + (ن-۱)^۲\}ھ^۳$$

$$= ن ا^۲ھ + ن(ن-۱) اھ^۲ + \frac{۱}{۶}(ن-۱) ن (۲ن-۱) ھ^۳$$

$$= ا^۲(ب-ا) + \left(۱-\frac{۱}{ن}\right) ا (ب-ا)^۲ + \frac{۱}{۳}\left(۱-\frac{۱}{ن}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲ن}\right)(ب-ا)^۳ \quad \ldots\ldots (۲)$$

جب، ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو اسکی انتہائی قیمت ہوتی ہے

$$ا^۲(ب-ا) + ا(ب-ا)^۲ + \frac{۱}{۳}(ب-ا)^۳ \text{ یا } \frac{۱}{۳}(ب^۳ - ا^۳) \quad \ldots\ldots (۳)$$

مثال ۲۔ منحنی کی عام صورت $ما = لا^م$ ...... (۴) جہاں م کی کوئی صحیح یا مکسور قیمت، مثبت یا منفی سوائے ‎-۱‎ کے ہو اس طور پر بحث میں آسکتی ہے۔ سعت (ب - ا) کے نقاط تقسیم کے فصلوں کو حسابی سلسلہ میں لینے کی بجائے جیسے عام طور پر لیا جاتا ہے ہندسی سلسلہ میں تقسیم کرتے ہیں، اس طرح فصلے یہ ہوتے ہیں

$ا ،\ م ا ،\ م^۲ ا ، \ldots\ م^ن ا$ جہاں $م^ن = \frac{ب}{ا}$

ذیلی حصے یہ ہونگے

$$\text{ھ}_{۱} = (\text{مہ} - ۱)\,\text{ا}\,،\ \text{ھ}_{۲} = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}\,\text{ا}\,،\ \text{ھ}_{۳} = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}^{۲}\,\text{ا} \ldots\ \text{ھ}_{\text{ن}} = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}^{\text{ن}-۱}\,\text{ا}$$

اِن حصوں کے شروع کے نقطوں پر کے معین ہیں $\text{ا}^{\text{م}}$ ، $\text{مہ}^{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$ ، $\text{مہ}^{۲\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$ ، .... $\text{مہ}^{(\text{ن}-۱)\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}}$

اور مجموعہ زیر بحث یہ ہے

$$(\text{مہ} - ۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱} \left\{ ۱ + \text{مہ}^{\text{م}+۱} + \text{مہ}^{۲(\text{م}+۱)} + \ldots\ldots + \text{مہ}^{(\text{ن}-۱)(\text{م}+۱)} \right\}$$

$$= (\text{مہ} - ۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱}\,\frac{\text{مہ}^{\text{ن}(\text{م}+۱)} - ۱}{\text{مہ}^{\text{م}+۱} - ۱} = \frac{\text{مہ} - ۱}{\text{مہ}^{\text{م}+۱} - ۱}\left(\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}\right) \ldots\ldots (۵)$$

مہ کو انتہا ایک کی طرف لانے سے ان چھوٹے حصوں کو لا انتہا کم کر دیا جا سکتا ہے، اور ن لا متناہی ہو جاتا ہے۔ اب چونکہ دفعہ ۲۲ کی رو سے

$$\lim_{\text{مہ} \to ۱} \frac{\text{مہ}^{\text{م}+۱} - ۱}{\text{مہ} - ۱} = \text{م} + ۱ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

نتیجہ یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}}{\text{م} + ۱} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

اگر اس میں رکھیں م = ۲ تو اوپر کی مثال ۱ کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

اوپر کا ذکی طرز عمل انگریزی ریاضی داں **والس** (۱۶۵۶) کا ہے، اس میں ترمیم کی ضرورت ہے جبکہ م = -۱، اس صورت میں (۵) کی بجائے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ن}(\text{مہ} - ۱) = \text{ن}\left\{ \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\frac{۱}{\text{ن}}} - ۱ \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

اِس کی انتہا جبکہ ن ← ∞ دفعہ ۴۳ (۹) کی رُو سے ہے لوک $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ .... (۹)

مثال ۳۔ فرض کرو کہ منحنی ما = جب لا .... (۱۰) ہے اور وسعت لا = عما سے لا = بما تک ہے مساوی ذیلی حصے لینے سے $\text{ھ} = \frac{\text{بما} - \text{عما}}{\text{ن}}$ .... (۱۱)

ذیل کے مجموعہ کی انتہا پر غور کرنا ہوگا

ک = {جب (عہ + ھ/۲) + جب (عہ + ۳/۲ ھ) + ... + جب (بہ − ۳/۲ ھ)

+ جب (بہ − ھ/۲)} ھ ......(۱۲)

جہاں ہر وقفہ کے وسط پر جب لا کی قیمتیں لی گئی ہیں۔ اب ۲۰۴

(جب ھ/۲)/(ھ/۲) ک = ۲ جب ھ/۲ جب (عہ + ھ/۲) + ۲ جب ھ/۲ جب (عہ + ۳/۲ ھ)

+ ... + ۲ جب ھ/۲ جب (بہ − ۳/۲ ھ) + ۲ جب ھ/۲ جب (بہ − ھ/۲)

= جم عہ − جم (عہ + ھ)

+ جم (عہ + ھ) − جم (عہ + ۲ ھ)

....

جم (بہ − ۲ ھ) − جم (بہ − ھ)

+ جم (بہ − ھ) − جم بہ

= جم عہ − جم بہ .... (۱۳)

اس لئے انتہا کی طرف گذرنے سے (ھ ← ۰) مطلوبہ رقبہ ہے

جم عہ − جم بہ .... (۱۴)

۸۸۔ مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق۔ اوپر کی طرح کے حسابات

تکملی احصا کے قاعدہ کی مدد سے عمل میں لائے جاتے ہیں، اسکی طرف اب ہم متوجہ ہوتے ہیں اگر لا کو ثابت رکھا جائے اور ب کو بدلا جائے تو دفعہ ۸۷ کا رقبہ ب کا تفاعل ہے اور یہ تفاعل صفر ہوتا ہے جبکہ ب = لا ۔ اگر ب کو صغاری اضافہ مف ب دیا جائے تو رقبہ کا اضافہ آخرالامر ایک مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوگا جس کا عرض مف ب اور ارتفاع فہ (ب) ہے (دیکھو دفعہ ۴۵) پس اگر رقبہ زیر بحث ق ہو تو

مف ق = فہ (ب) مف ب .... (۱)

یا
$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرب}} = \text{فہ (ب)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ما

لا

و ا ب بَ

شکل ۴۵

اگر پہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہو کہ پہَ (لا) = فہ (لا) یعنے پہ (لا)، فہ (لا) کا "نامحدود تکملہ" ہو تو

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرب}} = \text{پہَ (ب)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ق} = \text{پہ (ب)} + \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

جہاں م مستقل ہے اور چونکہ ق صفر ہوتا ہے ب = ا کے لئے اسلئے لازماً ہونا چاہئے م = - پہ (ا)، پس ق = پہ (ب) - پہ (ا)۔۔۔۔ (۵)

گویا رقبہ معلوم کرنے کا سوال اس طرح نامحدود تکمل کے سوال میں بدل گیا جس پہ گزشتہ باب میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = لا^م تو پہ (لا) = $\frac{\text{لا}^{\text{م+۱}}}{\text{م + ۱}}$ اور

$$ق = \frac{ب^{م+1} - ا^{م+1}}{م+1}$$ سوائے اس صورت کے جبکہ م = −۱

اگر فہ (لا) = $\frac{1}{لا}$ تو پہ (لا) = لوک لا اور ق = لوک $\frac{ب}{ا}$ ....(۷)

مثال ۴۔ اگر فہ (لا) = جب لا تو پہ (لا) = −جم لا

اور ق = −جم ب − (−جم عہ) = جم عہ − جم ب ......(۸)

یہ نتائج ان کے مطابق ہیں جو دفعہ ۸۷ میں بڑی محنت اور طول عمل کے ساتھ حاصل ہوئے۔

۸۹ – تکملہ کی عام تعریف۔ ترقیم۔ چھوٹی یا صغاری مقداروں کے

ایک سلسلہ کی انتہائی قیمت دریافت کرنے کا عمل ایسا ہے جس کے علم ہندسہ اور علم حیل میں بیشمار استعمال اور اطلاق ہیں۔ اب ہم اس پر باضابطہ طور پر بحث کرینگے اور ساتھ ہی ان امور کی طرف توجہ کرینگے جو محض نظری اہمیت رکھتے ہیں اور جن سے ابتک قطع نظر کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ عا = فہ (لا)، لا کا تفاعل ہے اور اسکو ہم معلوم (اور اسلئے محدود) فرض کرتے ہیں ا سے ب تک (بشمول طرفین) لا کی تمام قیمتوں کے لئے۔ فرض کرو کہ سعت ب − ا کو وقفوں

ھ₁، ھ₂، .... ھن ....(۱)

کی کسی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے، ان سب وقفوں کی ایک ہی علامت ہے اور

ھ₁ + ھ₂ + ھ₃ + ... + ھن = ب − ا ....(۲)

فرض کرو کہ عا کی ایک قیمت عا₁ ہے جو عا وقفہ ھ₁ میں اختیار کرتا ہے اور عا₂ ایک قیمت ہے جو یہ وقفہ ھ₂ میں اختیار کرتا ہے، علیٰ ہذالقیاس اور فرض کرو کہ

ع = عا₁ھ₁ + عا₂ھ₂ + ... + عان ھن ....(۳)

اس حاصل جمع کی قیمت عام طور پر ایک توسعت ب - ا کے طریقہ تقسیم کے ساتھ بدلیگی اور دوسرے ان مختلف وقفوں (۱) کے اندر قیمتوں $لا_{1}$، $لا_{2}$، $لا_{3}$ ...... $لا_{ن}$ کے انتخاب پر۔ لیکن اگر یہ شرط عائد کر دیجائے کہ ان میں سے کوئی وقفہ بھی ایک مقررہ مقدار ک سے تجاوز نہیں کر سکتا تو بعض صورتوں میں ہم دیکھینگے [اور ان صورتوں میں اکثر ایسے تفاعلوں کے نمونے شامل ہونگے جن سے احصا کے استعمال کی ضمن میں واسطہ پڑتا ہے (۱ اور کئی اور)] کہ ح کی قیمت ک کے کم ہونے کے ساتھ ایک معین انتہائی قیمت س کی طرف اس طور پر مائل ہوتی ہے کہ ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین ہو سکتا ہے کہ ح کا تفاوت س سے کسی چھوٹی سے چھوٹی مقررہ مقدار کی نسبت کم ہو گا۔

جس مجموعہ کو ح سے تعبیر کیا گیا ہے اسے زیادہ تفصیل سے یوں بیان کر سکتے ہیں

$$ح_{ا}^{ب}\ لا\ مف\ لا \quad \text{یا} \quad ح_{ا}^{ب}\ فہ(لا)\ مف\ لا \quad ...... (۴)$$

جہاں مف لا کو لا کے اضافوں $ھ_{1}$، $ھ_{2}$، $ھ_{3}$ .... $ھ_{ن}$ کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔ جب اضافے مف لا تمام لا انتہا چھوٹے ہوتے ہیں اور اس لئے انکی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے تو اس انتہائی قیمت کو (جبکہ اسکا وجود ہو) جسکی طرف یہ مجموعہ مستدق ہوتا ہے حدود ا اور ب کے درمیان فہ (لا) کا "محدود تکملہ" کہتے ہیں، اسے ہم

$$\int_{ا}^{ب} لا\ ذ\ لا \quad \text{یا} \quad \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\ ذ\ لا \quad ...... (۵) \quad \left[\int_{a}^{b} y\,dx\right]$$

سے تعبیر کرینگے اس ترقیم کو اختیار کرنے سے عمل کی وہ منزلیں جن سے

انتہائی قیمت حاصل کی گئی تھی پیش نظر رہتی ہیں۔+

ایسے سوالات جن میں (۳) جیسے مجموعہ کی انتہائی قیمت مطلوب ہوتی ہے علم ریاضی کی تقریباً ہر شاخ میں پائے جاتے ہیں۔ منحنی کے رقبہ پر پہلے بحث کی گئی ہے۔ اور دیگر سادہ مثالیں یہ ہیں۔ قوس کا طول جسے اندرونی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا خیال کیا جائے' گردشی مجسم کا حجم وغیرہ۔ آٹھویں باب میں ان پر خاص طور پر بحث کی جائے گی۔

حرکیات میں 'متغیر قوت کے دھکہ (Impulse) کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ وقت کے کسی وقفہ میں قوت کا "زمانی تکملہ" ہے یعنی اگر قوت ق وقت ت، کا تفاعل خیال کیا جائے تو دھکہ وقفہ $ت_۱$ - $ت_ب$ میں ذیل کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے

$$ق_۱\, \delta ت_۱ + ق_۲\, \delta ت_۲ + \ldots\ldots + ق_ن\, \delta ت_ن \qquad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

جہاں $\delta ت_۱$، $\delta ت_۲$ ... $\delta ت_ن$ وقفہ $ت_۱$ - $ت_ب$ کے ذیلی حصے ہیں اس طور پر کہ

$$\delta ت_۱ + \delta ت_۲ + \ldots\ldots + \delta ت_ن = ت_ب - ت_۱ \qquad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

اور $ق_۱$، $ق_۲$ ...... $ق_ن$ ان وقفوں میں قوت کی قیمتیں ہیں۔
پس ہماری موجودہ ترقیم کے لحاظ سے دھکہ ہے

$$\int_{ت_۱}^{ت_ب} ق\, ذت \qquad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

۲۰۷

+نوٹ:- تکملہ $\int$ میں علامت $\int$ حرف S کی خاص صورت ہے' اسکو پہلے ریاضی دانوں نے (Summation) حاصل جمع کی علامت کے لئے اختیار کیا۔ تکمل کی سمت کو اس طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ فوریر کی ایجاد ہے۔

$\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) ذلا میں علامت $\int$ مجموعہ کا میم (م) سمجھا جا سکتا ہے (مترجم)

نیوٹن کے دوسرے قانون حرکت کے مطابق کسی کمیت (ک) کے معیار کی تبدیلی اس دھکے کے مساوی ہوتی ہے جو اسے لگتا ہے یا

$$\text{ک و} - \text{ک و}_{۱} = \int_{\text{ت}_{۱}}^{\text{ت}} \text{ق ڈت} \quad \ldots\ldots (۹)$$

جہاں و، و۱ ابتدائی اور انتہائی رفتاریں ہیں۔

نیز متغیر قوت کا کام قوت کا مکانی تکملہ ہے۔ اگر قوت ف، جسم کے مقام (س) کا تفاعل ہو تو س جیسے س۰ سے س۱ تک بدلتا ہے کام جو کیا گیا ہے وہ ہے

$$\int_{\text{س}_{۰}}^{\text{س}_{۱}} \text{ق ڈس} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

مثلاً گیس کی اکائی کمیت جب حجم ح۰ سے ح۱ تک پھیلتی ہے تو جو کام ہوتا ہے وہ

$$\int_{\text{ح}_{۰}}^{\text{ح}_{۱}} \text{د ڈح} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

ہے اگر حجم ح کے وقت دباؤ د ہو۔ اسے ہم دیکھ سکتے ہیں اگر گیس کو اکائی رقبہ کی تراش کے اسطوانہ میں، فشارہ کے ذریعہ بند کیا ہوا فرض کیا جائے تکملہ (۱۰) یا (۱۱) کی ترسیمی تعبیر اکثر اوقات عملیات میں استعمال کیجاتی ہے۔ مثلاً (۱۰) کی صورت میں اگر ایک منحنی بنایا جائے جس میں س فصلہ ہو اور ق معین تو کام اُس رقبہ سے تعبیر ہوگا جو منحنی، س کے محور اور س۰ اور س۱ کے متناظر معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یہ واٹ کی نمائندہ تصویر کا اصول ہے*۔

۹۰۔ استدقاق کا ثبوت۔ جب مجموعہ $\sum$ کی ایک

* ذیل کے حوالے ملاحظہ ہوں Maxwell, Theory of Heat باب پنجم
Rankine, the Steam Engine صفحہ ۴۳

معین انتہائی قیمت ہو جیسا اوپر بیان ہوا تو فہ (لا) کو "قابل تکمل" کہا جاتا ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر مسلسل تفاعل اس مفہوم کے مطابق[+] قابل تکمل ہے لیکن باضابطہ ثبوت کے مدنظر ہم اپنی توجہ صرف اس خاص صورت تک محدود رکھینگے جس میں متغیر متبوع کی سعت محدود تعداد کے ایسے وقفوں میں منقسم ہو سکتی ہے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ عملی نقطہ نظر سے یہ کافی ہوگا۔ (محدود ہونے کی قید کے علاوہ) کوئی اور قید عائد کرنے سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو ثابت حدود مقرر کئے جا سکتے ہیں جن کے درمیان ح لازماً واقع ہوتا ہے۔ اگر وقفہ (ب - ا) کے اندر تفاعل فہ (لا) کی قیمتوں کی نچلی اور اوپر کی حدود (دفعہ ۷۱) لہ اور مہ ہوں تو ظاہر ہے کہ ح ذیل کے جملوں کے درمیان واقع ہوگا۔ ۲۰۸

$$لہ (ھ_1 + ھ_2 + \ldots\ldots + ھ_ن) = لہ (ب - ا)$$

اور $$مہ (ھ_1 + ھ_2 + \ldots\ldots + ھ_ن) = مہ (ب - ا)$$

تخصیص کی خاطر اب ہم مان لیتے ہیں کہ ب > ا اور فہ (لا) استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے جیسے لا ' ا سے ب تک بڑھتا ہے۔ وقفہ (ب - ا) کی تقسیم کے کسی خاص طریقہ

$$ھ_1 ، ھ_2 ، \ldots\ldots ھ_ن \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

پر غور کرو اور فرض کرو کہ

$$ح = م_1 ھ_1 + م_2 ھ_2 + \ldots\ldots + م_ن ھ_ن \qquad \ldots\ldots (۲)$$

+ اس کے یہ معنی ہیں کہ تکملہ کے لئے ریاضی ضابطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

جہاں دفعہ ۸۹ کے مطابق ما ر کوئی قیمت ہے جو تفاعل وقفہ ھر میں اختیار کرتا ہے۔

اب (۲) میں ما۱، ما۲ .... ما ن کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں رکھو جو اِن وقفوں کے شروع میں ہیں، اس طرح کوئی رقم نہیں بڑھے گی۔ اگر محصلہ مجموعہ کو حَ سے تعبیر کیا جائے تو

ح < حَ .... (۳)

اس کے بعد اگر ما۱، ما۲ .... ما ن کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں درج کی جائیں جو بالترتیب اِن وقفوں کے آخر سروں پر ہیں تو کوئی رقم کم نہیں ہوگی۔ اس لئے محصلہ مجموعہ حً ہو تو:

ح > حً .... (۴)

شکل (۴۶)

شکل ۴۶ میں مقدار حَ ایسی مستطیلوں کے سلسلہ کا مجموعہ ہے جیسے پ ن اور حً ایسی مستطیلوں کا مجموعہ جیسے س ن۔ اس لئے فرق حً ۔ حَ ایسی مستطیلوں کے مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جیسے س پ۔ موخر الذکر مستطیلوں کے ارتفاعوں کا مجموعہ ک ب ۔ ج ا یا فہ (ب) ۔ فہ (ا) ہے، اگر ک بڑے سے بڑا قاعدہ ہو یا وقفوں (۱) ۳۰۹

میں سے بڑے سے بڑا وقفہ ہو تو

ج̄ - ج ≯ ک [فہ (ب) - فہ (ا)] ..... (۵)

اب سعت (ب - ا) کی تقسیم کے تمام ممکن طریقوں پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مجموعات ج̄ کی جو ہمیشہ مہ (ب - ا) سے کم رہتے ہیں اوپر کی ایک انتہا ہوگی۔ اسے س̄ سے تعبیر کرو اور مجموعات ج̱ کی جو ہمیشہ لہ (ب - ا) سے بڑے رہتے ہیں ایک نچلی انتہا ہوگی جسے س̱ سے تعبیر کرو۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ س̱ ≮ س̄۔ (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ فرق س̱ - س̄ کو لازماً صفر اور ک {فہ (ب) - فہ (ا)} کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ اس بیان میں ک اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے ظاہر ہے کہ س̄ اور س̱ مساوی ہوئے بغیر نہیں رہ سکتے۔ ان کی مشترک قیمت کو ہم س سے تعبیر کرینگے۔

آخر لامر یہ ظاہر ہے کہ

| ج - س | < ج̄ - ج̱ < ک {فہ (ب) - فہ (ا)}
.... (۶)

اس لئے ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس امر کا پورا اطمینان کر سکتے ہیں کہ | ج - س | کسی مقررہ مقدار سے کم ہوگا خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔*

اسی طرح کا ثبوت درست ہوگا اگر تفاعل فہ (لا) سعت (ب - ا) میں استقلال کے ساتھ گھٹے۔

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ آخری نتیجہ درست رہے گا اگر سعت کو ایسے چھوٹے وقفوں کی محدود تعداد میں توڑا جا سکے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۷

* نیوٹن نے Principia, lib i; Sec. i lemma iii. (1687) میں جو ثبوت دیا ہے یہ ثبوت اس کی توسیع ہے۔ تمام ہندسی تخیلات کو نکال کر استدلال کو محض تحلیلی شکل میں پیش کرنا آسان ہوگا۔

شکل (۴۷)

یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ب > ا۔ اگر ب < ا تو وقفے ھ۱، ھ۲ ...... ھن منفی ہونگے مگر استدلال میں اصولاً کوئی فرق نہیں آئیگا۔ ۲۱۰

۹۱۔ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) ذلا کی خاصیتیں۔

(۱) اگر تکملوں $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) ذلا اور $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}}$ فا (لا) ذلا کا باہم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ دونوں تکملے ایک ہی مجموعہ کی انتہا خیال کئے جا سکتے ہیں، صرف اتنا فرق ہے کہ ایک صورت میں لا کے اضافے ھ۱، ھ۲ ...... ھن جن سے ملکر وقفہ ب - ا یا (ا - ب) بنتا ہے دوسری صورت کے اضافوں کے لحاظ سے متضاد علامت رکھتے ہیں۔

اسلئے $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}}$ فا (لا) ذلا = $-\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) ذلا ...... (۱)

(۲) نیز تعریف سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\int_{\text{ا}}^{\text{ج}}$ فا (لا) ذلا = $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) ذلا + $\int_{\text{ب}}^{\text{ج}}$ فا (لا) ذلا .... (۲)

شکل ۴۸ سے اسکی ترسیمی توضیح ہوتی ہے
(۳) اگر فہ (لا) کی کم سے کم اور بڑی سے بڑی قیمتیں لہ اور مہ ہوں جبکہ لا، ا سے ب تک گذرتا ہے تو تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ (لا)\, فرلا$$

شکل (۴۸)

قیمتوں لہ (ب - ا) اور مہ (ب - ا) کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اسلئے لازماً

$$یہ (ب - ا)$$

کے مساوی ہے جہاں لہ اور مہ کے درمیان مقدار یہ واقع ہے ۔
اگر فہ (لا) مسلسل ہو تو وسعت (ب - ا) کے اندر یہ تفاعل وہ تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے جو لہ، مہ کے درمیان واقع ہیں ۔ اسلئے ا اور ب کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت (ج) ضرور ایسی ہونی چاہئے کہ فہ (ج) = یہ شکل ۴۹ کی ترسیمی تعبیر میں رقبہ پ ا ب ق اس مستطیل کے مساوی ہے جس کا قاعدہ ا ب ہے اور ارتفاع وسعت ا ب کے ایک نقطہ ج کے معین کے مساوی ہے ۔ صریحاً ہم لکھہ سکتے ہیں

شکل (۴۹)

$$ج = ا + طہ (ب - ا)$$

۲۱۱ جہاں طہ کوئی مقدار ہے جو ۰ اور ا کے درمیان واقع ہے اس قرارداد کے مطابق

$$\int_{ا}^{ب} فہ (لا)\, فرلا = (ب - ا)\, فہ \{ا + طہ (ب - ا)\} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۴) زیادہ عام طور پر اگر ع، و، ما تین ایسے لا کے تفاعل ہوں کہ ا سے ب تک لا کی قیمتوں کے لئے

$$ع > ما > و \quad \ldots\ldots (۴)$$

تو تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} ما\, فرلا \quad \ldots\ldots (۵)$$

بلحاظ قیمت تکملوں $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ و فرلا .... (۶)

کے درمیان واقع ہوگا۔

پہلے فرض کرو کہ ب > ا ۔ تب $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا - $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا = $\int_{ا}^{ب}$ (ع - ما) فرلا

(۴) کی رو سے اُس مجموعہ کی ہر رقم جس کی انتہا آخری تکملہ ہے مثبت ہوگی۔ اس لئے

$\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا < $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا .... (۷)

اور اسی طرح $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا > $\int_{ا}^{ب}$ و فرلا .... (۸)

اگر ب < ا تو (۷) اور (۸) کی نامساواتیں الٹ جائینگی۔

۹۲۔ محدود تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے۔

فرض کرو کہ ت = $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا .... (۱)

صریحاً ت "تکمل کے حدود" ا، ب کا تفاعل ہے اور عام طور پر بدلیگا جبکہ انمیں سے کوئی ایک بدلے۔ ا کو ثابت مان کر ت کا مشتق تفاعل بلحاظ اوپری حد کے مرتب کرو اس طرح

ت + مف ت = $\int_{ا}^{ب + مف ب}$ فہ (لا) فرلا = $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا + $\int_{ب}^{ب + مف ب}$ فہ (لا) فرلا

.... (۲)

دفعہ ۹۱، (۲) کی رو سے ۔ اس لئے

$$مف\ ت = \int_{ب}^{ب+مف\ ب} فہ(لا)\ فرلا = مف\ ب\ فہ\ (ب + طہ\ مف\ ب) \quad ....(۳)$$

۲۱۴ دفعہ ۹۱٬ (۳) کی رو سے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مف ت٬ مف ب کے ساتھ معدوم ہوتا ہے یعنی ت٬ ب کا مسلسل تفاعل ہے۔

نیز چونکہ
$$\frac{مف\ ت}{مف\ ب} = فہ\ (ب + طہ\ مف\ ب) \quad ......(۴)$$

انتہا مف ب ← . لینے سے

$$\frac{فرت}{فرب} = فہ\ (ب) \quad ....(۵)$$

اسی طرح اگر اوپر کی حد ب کو ثابت رکھکر نچلی حد ا کو بدلا جائے تو ت٬ ا کا مسلسل تفاعل ہوگا اور

$$\frac{فرت}{فرا} = -\ فہ\ (ا) \quad ....(۶)$$

۹۳ — نامحدود تکملہ کا وجود۔ اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ کوئی تفاعل فہ(لا) جسکی نوعیت وہ ہو جو دفعہ ۹۰ میں بیان کی گئی ہے ایک نامحدود تکملہ رکھتا ہے یعنی ایک ایسے قابل تعین (ضروری نہیں کہ یہ محسوب بھی ہو سکے) تفاعل پہ(لا) کا وجود ہے کہ

$$پہ'(لا) = فہ(لا) \quad ....(۱)$$

یا

$$پہ\ (لا) = عفت\ فہ(لا) \quad ....(۲)$$

کیونکہ اگر لکھا جائے
$$پہ(ضہ) = \int^{ضہ} فہ\ (لا)\ فرلا \quad ....(۳)$$

تو بائیں جانب کا جملہ٬ دفعہ ۹۰ کی رو سے٬ ضہ کا ایک قابل تعین تفاعل ہے اور اوپر کی تحقیق سے واضح ہے کہ اس شرط کو پورا کرتا ہے

$$پہ'\ (ضہ) = فہ\ (ضہ) \quad ....(۴)$$

موجودہ نقطہ نظر سے (۳) میں تکمل کی نچلی حد اختیاری ہے اور اس لئے
تفاعل پہ (ضہ) جمع شدہ مستقل کی حد تک ناقابل تعین ہے کیونکہ
دفعہ ۹۱ (۲) کی رو سے (۳) میں نچلی حد کے طور پر ا کی بجائے ا درج کرنا
گویا بائیں جانب تکملہ

$$\int_{ا}^{ا} فہ(لا)\,فرلا$$

کا جمع کر دینا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۲۷ کے ساتھ۔

۹۴۔ محدود تکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ۔

important

جب کبھی پہ (لا) کی تحلیلی شکل معلوم ہو جس کا پہلا مشتق فہ (لا) ہے
تو محدود تکملہ

important

$$ت = \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\,فرلا \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کی قیمت فوراً لکھی جا سکتی ہے۔ کیونکہ اگر ا کو ثابت رکھا جائے تو دفعہ ۹۲ کی رو سے

۲۱۴

$$\frac{فرت}{فرب} = فہ(ب) = پہ(ب) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بموجب فرض۔ دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ ت اور پہ (ب)
صرف "ایک مستقل" کے لحاظ سے متفاوت ہو سکتے ہیں یعنی ان میں فرق
صرف ایک مستقل مقدار کا ہو سکتا ہے جو ب پر منحصر نہ ہو۔ پس

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\,فرلا = پہ(ب) + م \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

م چونکہ ب پر منحصر نہیں اسلئے م معلوم کرنیکے لئے رکھو ب = ا جس سے

$$پہ(ا) + م = \int_{ا}^{ا} فہ(لا)\,فرلا = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس لئے م = - پہ (ا) اور

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\,فرلا = پا(ب) - پا(ا) \quad ......(۵)$$

تکملی احصا کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس سے کسی معلومہ تفاعل فا(لا) کے محدود تکملہ کی قیمت دریافت کرنے کا مسئلہ مقلوب تفاعل پا(لا) یا عفتاً فا(لا) کے حاصل ہونے پر مبنی ہوتا ہے۔ اب اسکی وجہ ظاہر ہے کہ اس مقلوب تفاعل کو اس شکل

$$\int فا(لا)\,فرلا \quad ....(۶)$$

سے کیوں تعبیر کرتے ہیں۔ (۶) صرف $\int^{لا} فا(لا)\,فرلا$ ......(۷)

کا اختصار ہے جہاں ا اختیاری ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ ا میں کوئی تبدیلی محض مستقل کو بدل دینے کے مرادف ہے۔

ترقیم $\left[پا(ب)\right]_{ا}^{ب}$ ....(۸)

کو اکثر اوقات اختصار کے طور پر پا(ب) - پا(ا) کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ $\int_{ا}^{ب} فو^{ک لا}\,فرلا$ ....(۹)

یہاں فا(لا) = $فو^{ک لا}$، پا(لا) = $\frac{۱}{ک} فو^{ک لا}$

پس $\int_{ا}^{ب} فو^{ک لا}\,فرلا = \frac{۱}{ک}\left(فو^{ک ب} - فو^{ک ا}\right)$ ......(۱۰)

مثال ۲۔ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} جب^{۲} لا\,فرلا$ ....(۱۱)

۲۱۴

یہاں فا(لا) = $جب^{۲} لا$، پا(لا) = $\frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۴} جب ۲لا$

پس $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^{۲} لا فر لا $= \frac{\pi}{4}$ .... (۱۲)

۹۵- وہ صورتیں جہاں تفاعل فہ (لا) یا تکمل کے حدود لا متناہی ہو جاتی ہیں-

اور مثالوں پر غور کرنے سے پیشتر دفعہ ۹۰ کے تکملہ کی تعریف کو ذرا وسیع کرنا مناسب ہوگا- وہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ تکمل کے حدود ا، ب محدود ہیں اور تفاعل فہ (لا) تمام وسعت ب - ا میں محدود ہے-

اب ہم دیکھینگے کہ بعض حالات میں ان شرائط کو ذرا ڈھیلا کر دینا کیسے ممکن ہے-

(آ) فرض کرو کہ فہ (لا) لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہے- تکملہ

$\int_{ا}^{ص}$ فہ (لا) .... (۱)

پر غور کرو جہاں ص > ا - اگر ص کو لا انتہا بڑھانے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس انتہائی قیمت کو تکملہ

$\int_{ا}^{\infty}$ فہ (لا) فر لا .... (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں اور تکملہ (ا) کو ص ← ∞ کے لئے "مستدق" کہا جاتا ہے- جیسا کہ لا متناہی سلسلوں کے نظریہ سے یہ توقع کیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) استدقاق کے لئے یہ کافی شرط نہیں ہے کہ

$نہا_{لا \to \infty}$ فہ (لا) = ۰ .... (۳)

نیز یہ شرط ضروری بھی نہیں ہے کیونکہ استدقاق اس صورت میں بھی ممکن ہو سکتا ہے جبکہ لا ← ∞ کے لئے فہ (لا) کی کوئی معین انتہائی قیمت نہ ہو-

اسی طرح کی تعریف $\int_{-\infty}^{ب}$ فہ (لا) فر لا .... (۴)

کے لئے بھی مرتب ہو سکتی ہے-

(۲) فرض کرو کہ فا (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے تکمل کے حدود پر یا ان کے درمیان۔

صرف اس صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جہاں لا کی صرف ایک قیمت ہو جس کے لئے فا (لا) ← ∞ ۔ عام صورت اس صورت میں تحویل ہو سکتی ہے اگر سعت ب ۔ ا کو چھوٹے وقفوں میں توڑ دیا جائے*۔　۲۱۵

اگر فا (لا) (صرف) اوپر کی حد پر لامتناہی ہوتا ہو تو ہم سب سے پہلے تکملہ

∫ (ا سے ب ۔ صہ تک) فا (لا) فرلا . . . . (۵)

پر غور کرتے ہیں جہاں صہ مثبت ہے۔ اگر صہ کو لاانتہا کم کرنے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس قیمت کو ہم تکملہ

∫ (ا سے ب تک) فا (لا) فرلا کی تعریف قرار دیتے ہیں۔

اسی طرح کی تعریف اس صورت پر حاوی ہوگی جہاں فا (لا) نچلی حد ا پر لامتناہی ہوتا ہے۔

اگر فا (لا) حدود ا، ب کے درمیان لامتناہی ہوتا ہو مثلاً لا = ج کے لئے تو ہم اس مجموعہ پر غور کرتے ہیں

∫ (ا سے ج ۔ صہ تک) فا (لا) فرلا + ∫ (ج + صہَ سے ب تک) فا (لا) فرلا . . . . (۶)

اگر صہ (اور صہَ) کے کم کرنے سے ان میں سے ہر ایک تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو ان قیمتوں کے مجموعہ کو تکملہ

* یہ مان لیا جاتا ہے کہ فا (لا) اکیلے نقطوں کی محدود تعداد پر ہی لامتناہی ہوتا ہے۔

$$\int^{ب} فہ(لا)\, فرلا \quad \dots\dots\dots\dots (۷)^{+}$$

کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔
جب، فہ(لا) تنہا نقطون کی محدود تعداد پر لاانتناہی یا غیر مسلسل ہو تو ایسی صورتوں کا استعمال یوں ہو سکتا ہے کہ سعت کو ایسے چھوٹے وقفوں میں تقسیم کیا جائے جن کا نقاط غیر تسلسل احاطہ کریں۔

مثال ۱۔ $$\int_{ب}^{سہ} قو^{-عہ لا} فرلا = \left[-\frac{۱}{عہ} قو^{-عہ لا} \right]^{سہ} = \frac{۱ - قو^{-عہ سہ}}{عہ} \quad \dots (۸)$$

جیسے سہ بڑھتا ہے یہ جملہ انتہا $\frac{۱}{عہ}$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لئے

$$\int^{\infty} قو^{-عہ لا} فرلا = \frac{۱}{عہ} \quad \dots\dots\dots (۹)$$

مثال ۲۔ $$\int^{سہ} \frac{فرلا}{لا} = \left[لوک\ لا \right]_{۱}^{سہ} = لوک\ سہ \quad \dots (۱۰)$$ ۳۱۶

یہ سہ کے ساتھ لاانتہا بڑھتا ہے۔ اس لئے سہ ← ∞ کے لئے کوئی انتہائی قیمت نہیں ہے اگرچہ

$$\underset{لا \to \infty}{نہا} \frac{۱}{لا} = ۰ \quad \dots\dots\dots (۱۱)$$

+ ایسی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں جہاں ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\int^{ج - صہ} فہ(لا)\, فرلا \quad اور \quad \int_{ج + صہ}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

آخر الامر لاانتناہی ہو لیکن اگر کوئی خاص رشتہ انتہا میں صفر ہونے والی مقداروں صہ، صہ پر عائد کیا جائے تو ان دو تکملوں کے لاانتناہی جزو اس طور پر ایک دوسرے کو خارج کر سکتے ہیں کہ مجموعہ محدود رہے۔ رشتۂ مذکورہ اگر صہ = صہ ہو تو نتیجہ محصلہ کو جب اسکا وجود ہو کوشی (Cauchy) نے تکملہ (۷) کی "صدری قیمت" کہا ہے۔

مثال ۳۔ $\int_0^1 \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}}}$ . . . . (۱۲)

تفاعل $\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}}}$ لاتناہی ہوجاتا ہے لا ← ۱ کے لئے۔ لیکن

$\int_0^{1-\text{صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}}} = \left[-2\sqrt{1-\text{لا}}\right]_0^{1-\text{صہ}} = 2 - 2\sqrt{\text{صہ}}$ . . . . (۱۳)

اور جیسے صہ لاتناہی طور پر کم ہوتا ہے یہ جملہ انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

اس لئے $\int_0^1 \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}}} = 2$ . . . . (۱۴)

مثال ۴۔ $\int_0^1 \text{لوک لا فرلا}$ . . . . (۱۵)

$\int_{\text{صہ}}^1 \text{لوک لا فرلا} = \left[\text{لا لوک لا} - \text{لا}\right]_{\text{صہ}}^1$ . . . . (۱۶)

لیکن دفعہ ۴۲ (۵) سے $\underset{\text{صہ}\to 0}{\text{نہا}}\ \text{صہ لوک صہ} = 0$۔

اس لئے $\int_0^1 \text{لوک لا فرلا} = -1$ . . . . (۱۷)

۹۶ ـ دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال۔

محدود تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے چند اور تمثیلی سوال درج کئے جاتے ہیں

مثال ۱۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا فرلا} = \left[-\text{جم لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . . . . (۱)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جم لا فرلا} = \left[\text{جب لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . . . . (۲)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا جم لا فرلا} = \left[\tfrac{1}{2}\,\text{جب}^2\,\text{لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$ . . . . . . (۳)

مثال ۲- دفعہ ۸۰ کی رو سے

$$\int_{0}^{\text{سہ}} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا فر لا} = -\left[\text{فو}^{-\text{عہ لا}} \frac{\text{عہ جب بہ لا} + \text{بہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}\right]_{0}^{\text{سہ}}$$

$$= \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} - \frac{\text{عہ جب بہ سہ} + \text{بہ جم بہ سہ}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}\ \text{فو}^{-\text{عہ سہ}}$$

۲۱۷

اگر عہ مثبت ہو تو جیسے سہ لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے آخری رقم اپنی انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس لئے

$$\int_{0}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا فر لا} = \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \quad \ldots\ldots (4)$$

اسی طرح

$$\int_{0}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا فر لا} = \frac{\text{عہ}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \quad \ldots\ldots (5)$$

مثال ۳-

$$\int_{0}^{\text{سہ}} \frac{\text{فر لا}}{1 + \text{لا}^2} = \left[\text{مس}^{-1}\text{لا}\right]_{0}^{\text{سہ}} = \text{مس}^{-1}\text{سہ} - \text{مس}^{-1} 0.$$

تفاعل $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ کثیر القیمت تفاعل ہے (دفعہ ۱۶) لیکن یہ چنداں اہمیت نہیں رکھتا کہ کونسی قیمت لی جائے بشرطیکہ ہم یہ فرض کرلیں کہ یہ یکساں طور پر بدلتا ہے جیسے لا تکمل کی سعت میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر لیا جائے $\text{مس}^{-1} 0 = 0$ تو $\text{مس}^{-1}\text{سہ}$ سے وہ قیمت مراد ہوگی جو یکساں طور پر 0 سے سہ تک بڑھتی ہے۔ جب، سہ لا انتہا بڑھتا ہے تو یہ قیمت انتہاءً $\frac{\pi}{2}$ کی طرف مائل ہوتی ہے

اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{1 + \text{لا}^2} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

مثال ۴- دفعہ ۸۷ (۴) کی رو سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فر طہ}}{\text{عہ جب}^2\text{طہ} + \text{بہ جم}^2\text{طہ}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\text{عہ بہ}}}\ \text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}}\ \text{مس طہ}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

اب جیسے طہ، 0 سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے، $\sqrt{\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}}$ مس طہ صفر سے ∞ تک

بڑھتا ہے اور اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مس$^{-1}$ $\sqrt{\frac{عہ}{بہ}}$ مس طہ] صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے۔

اس لئے $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{فرطہ}{عہ جب^{2}طہ + بہ جم^{2}طہ} = \frac{\pi}{2\sqrt{عہ بہ}}$ ......(۷)

طالب علم نے گذشتہ باب کی ضمن میں دیکھا ہوگا کہ جب متغیر کے بدلنے سے "نامحدود تکمل" عمل میں لایا جاتا ہے (دفعات ۷۷، ۷۹) تو عمل کا نہایت تکلیف دہ حصہ وہ ہوتا ہے جس میں ابتدائی متغیر کی طرف عود کیا جاتا ہے۔ جب معلومہ حدود کے درمیان محدود تکملہ دریافت کرنا مقصود ہو تو عمل کا یہ حصہ غیر ضروری ہوتا ہے اور نامحدود تکملہ حاصل کرکے اس میں نئے حدود درج کر دینا کافی ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\int_{0}^{ا} \sqrt{ا^{2} - لا^{2}}\, فرلا$ کو معلوم کرو۔

دفعہ ۷۹ میں لا = ا جب طہ رکھنے سے حاصل ہوا

$$\int \sqrt{ا^{2} - لا^{2}}\, فرلا = ا^{2} \int جم^{2} طہ\, فرطہ = \frac{1}{2} ا^{2} (طہ + \frac{1}{2} جب ۲ طہ)$$

اب اگر طہ، ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بدلتا تو لا، ۰ سے ا تک بدلتا۔ اسلئے

$$\int_{0}^{ا} \sqrt{ا^{2} - لا^{2}}\, فرلا = \frac{1}{2} ا^{2} \left[طہ + \frac{1}{2} جب ۲ طہ \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \pi ا^{2} \qquad ....(۹)$$

۹۷۔ تحویلی ضابطے۔ دفعات ۸۱، ۸۲ کے طریقے جب محدود تکملوں کی تحویل میں استعمال کئے جاتے ہیں تو تکمل شدہ رقوم کے دونوں حدود پر صفر ہو جانے سے خاص طور پر سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اگر $ع_{ن} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جم^{ن} طہ\, فرطہ$ ....(۱۰)

تو دفعہ ۸۲ (۲) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \left[\frac{۱}{\text{ن}} \text{جب طہ جم}^{\text{ن}-۱} \text{طہ} \right]_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ن}-۲} \quad \ldots (۲)$$

اگر ن > ۱ تو پہلا حصہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ جب ۰ = ۰، جم $\frac{\pi}{۲}$ = ۰

اس لئے

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}} \text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}-۲} \text{طہ فرطہ} \quad \ldots (۳)$$

اسی طرح سے دفعہ ۸۲ (۶) کی رو سے

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}} \text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}-۲} \text{طہ فرطہ} \quad \ldots (۴)$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو (۳) کے متواتر استعمال سے

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}} \text{طہ فرطہ}$$

کو

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم طہ فرطہ} = ۱ \quad \text{یا} \quad \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲} \quad \ldots\ldots (۵)$$

کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

اسی طرح سے $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}} \text{طہ فرطہ}$ کو

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب طہ فرطہ} = ۱ \quad \text{یا} \quad \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲} \quad \ldots\ldots (۶)$$

پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۔ $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۵} \text{طہ فرطہ} = \frac{۴}{۵} \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۳} \text{طہ فرطہ}$

$$= \frac{۴}{۵} \times \frac{۲}{۳} \int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{۸}{۱۵}$$

اس طور پر دو تین مثالیں حل کرنے کے بعد طالب علم نتیجہ کے متواتر اجزائے ضربی کو زبانی

لکھہ سکیگا، مثلاً

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{6}\text{طہ فرطہ} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi$$

اوپر کے شکلوں کی عام قیمتیں آسانی سے لکھی جا سکتی ہیں۔ مثلاً اگر ن طاق ہو تو

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\times\cdots\times 2}{\text{ن}(\text{ن}-2)\times\cdots\times 3} \quad \cdots\cdots(7)$$

لیکن اگر ن جفت ہو تو

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\times\cdots\times 1}{\text{ن}(\text{ن}-2)\times\cdots\times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

(۸) ....

اس نمونہ کے تکملے احصا کے طبیعی استعمال میں اکثر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) اگر

$$\text{ع}_{\text{م، ن}} = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} \quad \cdots\cdots(9)$$

تو دفعہ ۸۲ (۱۰) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{م، ن}} = \left[\frac{1}{\text{م}+\text{ن}} \text{جب}^{\text{م}+1}\text{طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ}\right]_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{م، ن}-2} \quad \cdots\cdots(10)$$

اگر ن > ۱ تو [ ] کے اندر کا جملہ دونوں حدود پر معدوم ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}} \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ فرطہ} \quad \cdots(11)$$

اسی طرح دفعہ ۸۲ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے اگر م > ۱

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{م}-1}{\text{م}+\text{ن}} \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}-2}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} \quad \cdots(12)$$

ان ضابطوں کے ذریعہ کوئی سا قوت نما بھی بقدر ۲ کے کم کیا جا سکتا ہے اور اس عمل کی تکرار سے تکملہ (۹) اپنے تکملہ پر آکے منحصر ہو سکتا ہے جس میں قوت نما ۱ یا صفر ہے بشرطیکہ م، ن مثبت صحیح عدد ہوں۔ آخر الامر حاصل میں ذیل کی کوئی نہ کوئی صورت واقع ہوگی

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{2} \quad، \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{1}{2} \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = 1 \quad، \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ فرطہ} = 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13)$$

۲۲۰ مثال ۲۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^5 \text{طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ} = \frac{4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^3 \text{طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ}$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ}$$

(۱۲) کی رو سے ۔ نیز (۱۱) سے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ} = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$$

اس لئے $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^5 \text{طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ} = \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

تھوڑی مشق کے بعد جواب فوراً لکھا جا سکیگا ۔ مثلاً

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^6 \text{طہ جم}^2 \text{طہ فرطہ} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{256} \pi$$

ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) نیز (۳) اور (۴) کی عملی مشقوں میں ضرورت ہوتی ہے۔ ان کو یاد رکھنا مناسب ہے۔

نیز جبری تکملہ $\int_0^1 \text{لا}^{\text{م}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}} \text{فرلا}$ .... (۱۴)

میں رکھو $\text{لا} = \text{جب}^2 \text{طہ}$ تو اس کی یہ صورت ہو جاتی ہے

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2\text{م}+1} \text{طہ جم}^{2\text{ن}+1} \text{طہ فرطہ} \ldots\ldots\ldots (15)$$

اسکی قیمت اوپر کے ضابطوں سے لکھی جا سکتی ہے جب کبھی ۲ م + ۱ اور ۲ ن + ۱ مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر ہوں ۔

اسی طرح تکملہ $\int_{0}^{1}$ لا^{م} (۱ - لا^{۲})^{ن} فرلا .... (۱۶)

میں رکھو لا = جب طہ تو تکملہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{م} طہ جم$^{۲ن+۱}$ طہ فرطہ .... (۱۷)

مثال ۳ - $\int_{0}^{1}$ لا^{۲} (۱ - لا)$^{\frac{۳}{۲}}$ فرلا = ۲ $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۵} طہ جم^{۴} طہ فرطہ

$= ۲ \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۲}{۷} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۱۶}{۳۱۵}$

مثال ۴ - $\int_{0}^{1}$ لا^{۲} (۱ - لا^{۲})$^{\frac{۳}{۲}}$ فرلا = $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^{۲} طہ جم^{۴} طہ فرطہ $= \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۲}$

$= \frac{\pi}{۳۲}$

۲۲۱

۹۸ - مربوط تکملے۔ محدود تکملوں کے متعلق کئی مسئلے ہیں جو دفعہ ۸۹ کی تعریف سے محض وجدانی طور پر حاصل ہوتے ہیں مثلاً

$\int_{0}^{1}$ فہ (لا) فرلا = $\int_{0}^{1}$ فہ (۱ - لا) فرلا ...... (۱)

اس کے ثبوت کے لئے لکھو لا = ۱ - لاَ ، فرلا = - فرلاَ ۔ تکمل کے حدود میں لا = ۰ ، لا = ۱ کے جواب میں لاَ = ۱ ، لاَ = ۰ بالترتیب ۔ پس

$\int_{0}^{1}$ فہ (لا) فرلا = - $\int_{1}^{0}$ فہ (۱ - لاَ) فرلاَ = $\int_{0}^{1}$ فہ (۱ - لا) فرلا

آخیر میں زبر نکال دیا گیا کہ اس کی ضرورت نہیں ۔

اوپر کا عمل سب دا کو نقطہ لا = ½ پر لیجا کر محور لا کی سمت کو بدل دینے کے مرادف ہے ۔ اس طور پر معلوم ہوگا کہ (۱) سے جو رقبے تعبیر ہوتے ہیں وہ متماثل ہیں ۔

(۱) کی ضروری شکل یہ ہے

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ف (جب طہ) فرطہ = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ف (جم طہ) فرطہ ..... (۲)

مثال ۱- مثلاً $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^2 طہ فرطہ = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جم^2 طہ فرطہ

پس ہر ایک تکملہ = $\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جب^2 طہ + جم^2 طہ) فرطہ = $\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ فرطہ = $\frac{\pi}{4}$

اگر فہ (لا) لا کا جفت تفاعل ہو یعنی فہ (-لا) = فہ (لا) ..... (۳)

تو $\int_{-ا}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۲ $\int_{0}^{ا}$ فہ (لا) فرلا .... (۴) ۲۲۲

پہلے تکملہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے صریحاً اس کی تنصیف محور ما سے ہوتی ہے۔ برعکس اس کے اگر فہ (لا) لا کا طاق تفاعل ہو یعنے فہ (-لا) = -فہ (لا) ... (۵)

شکل (۵۰)

تو $\int_{-ا}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۰ .... (۶)

کیونکہ اُس مجموعہ میں جسکی انتہا یہ محدود تکملہ ہے (دفعہ ۸۹) جزو فہ (لا) مف لا اور متقابل کی علامت والا جزو فہ (-لا) مف لا دونوں ملکر ایک دوسرے کے ساقط کرتے ہیں۔

شکل (۵۱)

مثال ۲۔ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^2 طہ جم^3 طہ فرطہ = ۲ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^2 طہ جم^3 طہ فرطہ

$= ۲ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۲}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ = ۰ کیونکہ جب^3 طہ، طہ کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔

ایسے ہی وجوہات کی بنا پر اگر فہ (ا ـ لا) = فہ (لا) .... (۷)

تو $\int_{0}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۲ × $\int_{0}^{\frac{ا}{2}}$ فہ (لا) فرلا .... (۸)

لیکن اگر فہ (ا ـ لا) = ـ فہ (لا) .... (۹)

تو $\int_{0}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۰ .... (۱۰)

(۸) کی خاص صورت کے طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$\int_{0}^{\pi}$ ف (جب طہ) فرطہ = ۲ × $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ف (جب طہ) فرطہ .... (۱۱)

کیونکہ جب (π ـ طہ) = جب طہ

۲۲۴ مثال ۳۔ $\int_{0}^{\pi}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ = ۲ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ

$= ۲ \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{0}^{\pi}$ جب^2 طہ جم^3 طہ فرطہ = ۰

امثلہ ۳۱

۱۔ دفعہ ۵ مثال ۱ کے طریقہ سے ثابت کرو کہ $\int_{ا}^{ب}$ لا^3 فرلا = $\frac{۱}{۴}$ (ب^4 ـ ا^4)

۲۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ثابت کرو کہ $\int_{\text{عا}}^{\text{بہ}} \text{جم لا فر لا} = \text{جب بہ} - \text{جب عا}$

۳۔ نیز ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{قو}^{\text{ک لا}}\ \text{فر لا} = \frac{\text{قو}^{\text{ک ب}} - \text{قو}^{\text{ک ا}}}{\text{ک}}$

۴۔ ترسیمی تخیلات کی بناء پر دکھاؤ کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ک فا(لا) فر لا} = \text{ک} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فر لا}$$

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فر لا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ب} - \text{ا}} \text{فا(لا + ا) فر لا} ، \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(ک لا) فر لا} = \frac{۱}{\text{ک}} \int_{\text{ک ا}}^{\text{ک ب}} \text{فا(لا) فر لا}$$

۵۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فر لا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(ا + ب - لا) فر لا}$

۶۔ اگر ن اور پ مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{\text{ن}+۲} + \ldots\ldots + \frac{۱}{\text{پ ن}} \right) = \text{لوگ پ}$$

امثلہ ۳۲

۱۔ $\int_{\text{.}}^{۱} \sqrt{\text{لا}}\ \text{فر لا} = \frac{۲}{۳}$ ، $\int_{\text{.}}^{۱} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{لا}}} = ۲$ ، $\int_{\text{.}}^{۱} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۳ - ۲\text{لا}}} = \sqrt{۳} - ۱$

۲۔ $\int_{\text{.}}^{۱} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۲}$ ، $\int_{\text{.}}^{\frac{۱}{\pi}} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۳ - ۲\text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۴\sqrt{۳}}$

۳۔ $\int_{\text{.}}^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ \text{لا}^۲} = \frac{\pi}{۲\text{ا ب}}$

۴۔ $\int_{\text{.}}^{۱} \frac{\text{لا فر لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = ۱$ ، $\int_{\text{.}}^{۱} \frac{\text{لا فر لا}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}} = \sqrt{۲} - ۱$

۲۲۴

۵- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2+1}} = \text{لوک}(1+\sqrt{2})$، $\int_{1}^{2} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \text{لوک}(2+\sqrt{3})$

۶- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا})} = \text{لوک}\,2$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا}^2)} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,2$

۷- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

۸- $\int_{0}^{1} \frac{1-\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2} - 1$

۹- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{\pi}{2\,\text{ا}\,\text{ب}(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۰- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{\pi}{2(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۱- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

۱۲- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا})} = 1-\text{لوک}\,2$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا})^2} = \text{لوک}\,2 - \frac{1}{2}$

۱۳- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2} = \frac{\pi}{4}$،

۱۴- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \frac{\pi}{2}$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2+1}} = \text{لوک}(1+\sqrt{2})$

۱۵- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(1-\text{لا})}} = \pi$، $\int_{0}^{1} \sqrt{\left(\frac{\text{لا}}{1-\text{لا}}\right)}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2}$

× ۱۶- $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \pi$، $\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{لا})}} = \pi$

ط

۱۸- $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \sqrt{\frac{\text{ب} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{ا}}}\ \text{فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \sqrt{\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ب} - \text{لا}}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\pi(\text{ب} - \text{ا})$

۱۹- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط}^{۲}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = ۱$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس}^{۲}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = ۱ - \frac{\pi}{۴}$

۲۰- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{جب}\ ۲\text{طہ}\ \text{فرطہ} = ۱$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}\ ۲\text{طہ}\ \text{فرطہ} = ۰$

۲۱- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{۱ + \text{جب}^{۲}\text{طہ}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب طہ فرطہ}}{۱ + \text{جم}^{۲}\text{طہ}} = \frac{\pi}{۴}$

۲۲- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط}^{۴}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{۳}{۴}$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس}^{۴}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۲}{۳}$

۲۲۵

۲۳- $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرطہ}}{۱ + \text{ز جم طہ}} = \frac{\pi}{\sqrt{۱ - \text{ز}^{۲}}}$، $[\text{ز} < ۱]$

۲۴- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطہ}}{۱ + \text{جم طہ}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرطہ}}{۱ + \text{جب طہ}} = ۱$

۲۵- $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \text{مس طہ}\ \text{فرطہ} = ۰$، $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \text{قط طہ}\ \text{فرطہ} = \text{لوک}(۳ + ۲\sqrt{۲})$

۲۶- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\text{قط طہ} - \text{مس طہ})\ \text{فرطہ} = \text{لوک}\ ۲$،

۲۷- $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرطہ}}{\text{ا}^{۲} - ۲\text{اب جم طہ} + \text{ب}^{۲}} = \frac{\pi}{|\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲}|}$

۲۸- $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{لوک لا}\ \text{فرلا} = -\frac{۱}{(\text{ن} + ۱)^{۲}}$

۲۹- $\int_{۰}^{۱} \text{جب}^{-۱}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{\pi}{۲} - ۱$، $\int_{۰}^{۱} \text{مس}^{-۱}\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ ۲$

۳۰- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ جب طہ فرطہ} = ۱ ،\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ جم طہ فرطہ} = \frac{\pi}{۲} - ۱$

۳۱- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}^{۲} \text{جب طہ فرطہ} = \pi - ۲ ،\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}^{۲} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{\pi^{۲}}{۴} - ۲$

۳۲- $\int_{0}^{\pi} \text{طہ} (\pi - \text{طہ}) \text{جب طہ فرطہ} = ۴ ،\quad \int_{0}^{\pi} \text{طہ} (\pi - \text{طہ}) \text{جم طہ فرطہ} =$

۳۳- $\int_{-۱}^{۱} (۱ - \text{لا}^{۲}) \text{جم بہ لا فرلا} = \frac{۴}{\text{بہ}^{۳}} (\text{جب بہ} - \text{بہ جم بہ})$

۳۴- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا سس}^{-۱} \text{لا}}{(۱ + \text{لا}^{۲})^{۲}} \text{فرلا} = \frac{\pi}{۸}$

۳۵- $\int_{-۱}^{۱} \frac{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}{\text{ا} - \text{لا}} \text{فرلا} = \pi \left\{ \text{ا} - \sqrt{\text{ا}^{۲} - ۱} \right\}$ بشرطیکہ $\text{ا} > ۱$

۳۶- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{طہ قط}^{۲} \text{طہ فرطہ} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } ۲$

۳۷- $\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}} \text{جم} (\text{لا} + \frac{\pi}{۴}) \text{فرلا} = ۰$

۳۸- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{فرع}}{\text{جمز ع}} = \pi$

۳۹- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{۲} \text{قو}^{\text{لا}} + \text{ب}^{۲} \text{قو}^{-\text{لا}}} = \frac{۱}{\text{اب}} \text{سس}^{-۱} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۰- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{۲} \text{جمز}^{۲} \text{لا} + \text{ب}^{۲} \text{جبز}^{۲} \text{لا}} = \frac{۱}{\text{اب}} \text{سس}^{-۱} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۱- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{عہ فرلا}}{\text{عہ}^{۲} + \text{جبز}^{۲} \text{لا}} = \frac{\text{جم}^{-۱} \text{عہ}}{\sqrt{۱ - \text{عہ}^{۲}}}$ یا $\frac{\text{جمز}^{-۱} \text{عہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{۲} - ۱}}$ بموجب اسکے کہ $\text{عہ}^{۲} \lessgtr ۱$　۳۳۶

۴۲- $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{جمز}^2 \text{عہ} - \text{جم}^2 \text{طہ}} = \frac{\pi}{\text{جنز عہ}} \cdot \int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^2 \text{طہ فرطہ}}{\text{جمز}^2 \text{عہ} - \text{جم}^2 \text{طہ}}$

$= \frac{\pi \, \text{قو}^{-\text{عہ}}}{2 \, \text{جبز عہ}}$

امثلہ ۳۳

(تحویلی ضابطے وغیرہ)

۱- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں لکھو

(۱) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^2 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^4 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{\circ}^{\pi} \text{جب}^3 \text{طہ فرطہ}$

(۲) $\int_{\circ}^{\pi} \text{جب}^2 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^3 \text{طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ}$ ،

$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^5 \text{طہ جم}^6 \text{طہ فرطہ}$

(۳) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^5 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{\circ}^{\pi} \text{جم}^5 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{\circ}^{\pi} \text{جب}^3 \text{طہ جم}^4 \text{طہ فرطہ}$

(۴) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^4 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^5 \text{طہ فرطہ}$ ،

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^5 \text{طہ فرطہ}$ ، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^3 \text{طہ جم}^3 \text{طہ فرطہ}$

۲- ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$\int_{\circ}^{1} \text{لا}^{\text{م}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}} \, \text{فرلا} = \int_{\circ}^{1} \text{لا}^{\text{ن}} (1 - \text{لا})^{\text{م}} \, \text{فرلا}$ ،

ثابت کرو کہ انکی مشترک قیمت ہے $\frac{\lfloor \text{م} \, \lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{م} + \text{ن} + 1}$

۳۔ ثابت کرو کہ $\int_{-۱}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا} = ۲\int_{۰}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}$ ،

$\int_{-۱}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{لا}\,\text{فرلا} = ۰$

۴۔ ثابت کرو کہ $\int_{-۱}^{۱} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{۱} [\text{فا}(\text{لا}) + \text{فا}(-\text{لا})]\,\text{فرلا}$

اور $\int_{-۱}^{۱} [\text{فا}(\text{لا}) - \text{فا}(-\text{لا})]\,\text{فرلا} = ۰$

۲۲۷ — ۵۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۴}} \text{مس}^{\text{ن}}\,\text{طا}\,\text{فرطا}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{ن}-۱} - \text{ع}_{\text{ن}-۲}$

۶۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۲}{۶۳}$

۷۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا})^{۳}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۱۴۰}$

۸۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}(۱-\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۳\text{ط}}{۱۲۸}$

۹۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}^{۵}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۸}{۱۵}$ ، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}^{۶}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۵}{۳۲}\,\text{ط}$

۱۰۔ $\int_{-\frac{\text{ط}}{۲}}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \text{طا}\,\text{جب}\,\text{طا}\,\text{جم}\,\text{طا}\,\text{فرطا} = \frac{\text{ط}}{۴}$ ، $\int_{-\frac{\text{ط}}{۲}}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \text{طا}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طا}\,\text{فرطا} = ۰$

۱۱۔ $\int_{۰}^{\text{ط}} \text{طا}\,\text{جب}\,\text{طا}\,\text{جم}^{۲}\,\text{طا}\,\text{فرطا} = \frac{\text{ط}}{۳}$ ، $\int_{۰}^{\text{ط}} \text{طا}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طا}\,\text{جم}\,\text{طا}\,\text{فرطا} = -\frac{۴}{۹}$

۱۲۔ $\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۳\,\text{طا}}{\text{جب}\,\text{طا}}\,\text{فرطا} = \frac{\text{ط}}{۲}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۴\,\text{طا}}{\text{جب}\,\text{طا}}\,\text{فرطا} = \frac{۳}{۴}$ ،

$\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۵\,\text{طا}}{\text{جب}\,\text{طا}}\,\text{فرطا} = \frac{\text{ط}}{۲}$

۱۳- $\int_{ب}^{۲} (ا\ جب\ طہ + ب\ جم\ طہ)^{۵} \,فرطہ = \frac{۱۶}{۱۵} ا^{۵} + \frac{۸}{۳} ا^{۳} ب^{۲} + ۲ ا ب^{۴}$

۱۴- $\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{جم\ لا - جب\ لا}{۱ + جب\ لا\ جم\ لا} \,فرلا = ۰$

۱۵- ثابت کرو کہ $\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{جم^{۲} طہ\ فرطہ}{ا^{۲} جم^{۲} طہ + ب^{۲} جب^{۲} طہ} = \frac{\pi}{۲\ ا\ (ا + ب)}$

$\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{جب^{۲} طہ\ فرطہ}{ا^{۲} جم^{۲} طہ + ب^{۲} جب^{۲} طہ} = \frac{\pi}{۲\ ب\ (ا + ب)}$

۱۶- ثابت کرو کہ $\int_{-۱}^{۱} (۱ + لا)^{م} (۱ - لا)^{ن} \,فرلا$

$= ۲^{م + ن + ۲} \int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} جب^{۲ن + ۱} طہ\ جم^{۲م + ۱} طہ\ فرطہ$

۱۷- ثابت کرو کہ $\int_{ب}^{\infty} \frac{فرلا}{(۱ + لا^{۲})^{ن}}$

$= \frac{۲ن - ۳}{۲ن - ۲} \int_{ب}^{\infty} \frac{فرلا}{(۱ + لا^{۲})^{ن - ۱}}$ [رکھو لا = مس طہ]

۱۸- اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$\int_{ب}^{\infty} \frac{فرلا}{(۱ + لا^{۲})^{ن + \frac{۱}{۲}}} = \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots\cdots (۲ن - ۲)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots\cdots (۲ن - ۱)}$

۱۹- اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$\int_{ب}^{\infty} \frac{فرلا}{\{لا + \sqrt{لا^{۲} + ۱}\}^{ن}} = \frac{ن}{ن^{۲} - ۱}$ رکھو لا = جمز ع

۲۰- ثابت کرو کہ $\int_{ب}^{\infty} \frac{فرع}{جمز^{ن} ع} = \frac{ن - ۲}{ن - ۱} \int_{ب}^{\infty} \frac{فرع}{جمز^{ن - ۲} ع}$

[رکھو جمز ع = قط طہ]

۲۱۔ اگر $ع_ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ طہ جم^{ن} طہ فرطہ تو ثابت کرو کہ $ع_ن = -\frac{1}{ن\,2^{ن}} + \frac{ن-1}{ن}\, ع_{ن-2}$

ثابت کرو کہ $ع_{\frac{\pi}{4}} = \ldots\ldots ۲۶۹۴ء$

۲۲۔ اگر $ع_ن = \int_{0}^{2ر} لا^{ن} \sqrt{2رلا - لا^2}$ فرلا تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = \frac{2ن+1}{ن+2}\, ر\, ع_{ن-1}$$

ہندسی طریق پر یا کسی اور طرح سے ع. کی قیمت دریافت کرو اور ع۱، ع۲ کی قیمتیں مستنبط کرو۔

امثلہ ۳۴

۱۔ $\int_{0}^{1} (1 - لا^2)^{ن}$ فرلا کی قیمت پر غور کر کے ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

$$1 - \frac{ن}{1\times 3} + \frac{ن(ن-1)}{1\times 2\times 5} - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1\times 2\times 3\times 7}$$

$$+ \ldots\ldots = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots\ldots 2ن}{3\times 5\times 7\times \ldots\ldots (2ن+1)}$$

۲۔ اگر $(1+لا)^{ن} = 1 + پ_1 لا + پ_2 لا^2 + \ldots + پ_ن لا^{ن}$ تو ثابت کرو کہ

$$پ_1 - \frac{1}{2} پ_2 + \frac{1}{3} پ_3 - \ldots + (-1)^{ن-1} \frac{پ_ن}{ن} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{ن}$$

۳۔ اگر ر بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلہ کا مجموعہ لاتناہی تک تقریباً $\frac{\pi}{4ر}$ ہے

$$\frac{ر}{ر^2} + \frac{ر}{ر^2+1^2} + \frac{ر}{ر^2+2^2} + \ldots\ldots\ldots$$

۴۔ ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\pi} \frac{لا\, جب\, لا}{1 + جم^2 لا}$ فرلا $= \frac{\pi^2}{4}$

۵ — ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}+1}\text{طہ فرطہ} < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$$

اس طرح ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{2}$ ، کسر

$$\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\ldots\ldots\times۲\text{ن}\times۲\text{ن}}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\ldots\ldots\times(۲\text{ن}-۱)(۲\text{ن}-۱)}$$

اور اس کسر کے درمیان میں واقع ہوتا ہے جو اوپر کی کسر کے شمارکنندہ اور نسب نما دونوں سے آخری جزو ضربی حذف کرنے سے حاصل ہو۔ (والس)۔

۶ — ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{\text{ن}+1}\text{طہ فرطہ} < \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$$

اس لئے امثلہ ۳۲ (۵) کا نتیجہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$

$$\frac{1}{۲(\text{ن}-۱)} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{۲(\text{ن}+۱)}$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷ — ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \text{جب طہ فرطہ} \quad \text{اور} \quad \int_{0}^{\infty} \text{جم طہ فرطہ}$$

ناقابل تعین ہیں۔

۸ — ترسیمی تخیلات کی بناء پر ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\,\text{فرطہ} \quad \text{محدود اور قابل تعین ہے۔}$$

۹ — اگر فہ(لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو ہ اور ا کے درمیان ہیں سوائے لا = ۰ کے جس کے لئے یہ لامتناہی ہوتا ہے تو تکملہ $\int_{0}^{ا}$ فہ(لا) فرلا محدود ہے بشرطیکہ ایک مثبت مقدار م ایسی معلوم ہو سکتی ہے

جوایک سے کم ہے اور

$$\underset{\text{لا}\to\text{۰}}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{فا}(\text{لا})$$ محدود ہے۔ [رکھو $\text{لا} = \text{ت}^{\text{ن}}$]

۱۰۔ اگر فا(لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی تمام قیمتوں کے لئے تو تکملہ

$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ محدود ہوگا بشرطیکہ ایک مقدار م ایسی مل سکتی ہو جو ایک سے بڑی ہے

اور $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{فا}(\text{لا})$ محدود ہے۔ [رکھو $\text{لا} = \text{ت}^{-\text{ن}}$]

۲۳۰ ۱۱۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{جم}\ \text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا} \quad \text{اور} \quad \int_{\text{۰}}^{\infty} \text{جب}\ \text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا}$$

محدود اور قابل تعیین ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} \text{لا}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \text{۰}$

۱۳۔ ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} \quad (\text{جہاں ن} > -\text{۱})$$

محدود اور قابل تعیین ہے۔

۱۴۔ اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{۲ن}+\text{۱}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\underline{\text{ن}}$$

۱۵۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{عا لا}}\,\text{فرلا}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{عا}}\,\text{ع}_{\text{ن}-\text{۱}}$

جہاں ن مثبت ہے۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن صحیح عدد ہو تو

$$\int_{0}^{\infty} لا^{ن}\, لو^{-ع لا}\, فر لا = \frac{ن!}{ع^{ن+1}}$$

۱۶۔ ناقصی تکملہ $\int_{0}^{فہ} \frac{فر طہ}{\sqrt{1 - ک^2 جب^2 طہ}}$ کی جدولیں زاویہ کے منٹ کے فرق پر فہ کی قیمتوں کے لئے مرتب کی گئی ہیں۔ جدول کے کسی حصہ میں متواتر اندراجوں کے فرق کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

مثلاً اگر ک = $\frac{1}{2}$، فہ = ۶۰° تو ثابت کرو کہ فرق تقریباً ۰۰۰۳۲۳ء ہوگا۔

۱۷۔ اگر ف (لا) اور فہ (لا) محدود اور مسلسل ہوں اور فہ (لا) کی تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک وہی علامت رہے تو

$$\int_{ا}^{ب} ف(لا)\, فہ(لا)\, فر لا = ف\,[ا + طہ(ب - ا)] \int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فر لا$$

جہاں ۱ > طہ > ۰۔

۱۸۔ یہ بتاؤ کہ تساوی $\int_{1}^{لا} \frac{فر لا}{لا}$ = لوک لا سے یہ کیونکر حاصل ہوتا ہے کہ موسیقی سلسلہ ۱ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + ... کی ن رقموں کا مجموعہ لوک (۱ + ن) اور ۱ + لوک ن کے درمیان واقع ہے۔ ۲۳۱

ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی دس لاکھ رقموں کا مجموعہ ۱۳ء۸ اور ۱۴ء۸ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۹۔ ترسیمی اصولوں کی بناء پر دکھاؤ کہ اگر ف (لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے جیسے لا ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے تو سلسلہ

ف (۱) + ف (۲) + ف (۳) + ...

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ت اور ت + ف (۱) کے درمیان واقع ہوتا ہے بشرطیکہ تکملہ ت = $\int_{1}^{\infty}$ ف (لا) ڈلا محدود ہو۔ اس کو سلسلہ

$\frac{1}{(ن+1)^2} + \frac{1}{(ن+2)^2} + \frac{1}{(ن+3)^2} + \ldots\ldots$ پر استعمال کرو۔

امثلہ ۳۵

۱۔ اگر ایک گیس کا دباؤ (د) ہو اور حجم (ح) اور ان میں تعلق ہو د ح = مستقل تو حجم ح سے ح۱ تک پھیلنے میں کام و۱ ح لوگ $\frac{ح}{ح_1}$ ہوگا۔

۲۔ اگر اسمیں رشتہ د ح^{جـ} = مستقل ہو تو کام ہوگا

$$\frac{1}{جـ - 1}(د_1 ح_1 - د ح)$$

۳۔ ایک لچکدار رسی کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے طبعی طول پر اس کا اضافہ۔ ایک طول سے دوسرے طول تک رسی کو کھینچکر تانے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ وہی ہے گویا تناؤ مستقل ہے اور اس کے ابتدائی اور آخری تناؤں کے نصف مجموعہ کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک پونڈ کو لاتناہی فاصلہ سے سطح زمین تک لانے میں جاذبہ ارض جو کام کرتی ہے وہ ن فٹ پونڈ کے مساوی ہے جہاں زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے۔ (یہ مان لو کہ قوت جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے)

(تمت)

۲۳۲

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

۹۹- رقبہ کی تعریف۔ اصول اقلیدس میں ایسے مسائل ثابت کئے گئے ہیں جن سے اصطلاح "رقبہ" کا ٹھیک مفہوم متعین ہوتا ہے مگر صرف اس صورت میں جبکہ اشکال بالتمام خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہوں۔ بالخصوص یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایک مستطیل کسی دی ہوئی شکل کے مساوی ایک دئے ہوے قاعدہ پر بنایا جا سکتا ہے، یہ قاعدہ کوئی اختیاری طول ہو سکتا ہے مثلاً طول کی اکائی۔ اس شکل کا رقبہ اس نسبت کے ناپ سے تعبیر ہوگا جو اس مستطیل کو اکائی طول والے ایک مربع کے ساتھ ہے۔

اس عمل کا اطلاق ایسی شکل پر نہیں ہو سکتا جو پورے یا جزوی طور پر **منحنی** خطوط سے گھری ہوئی ہو۔ اس لئے ہمیں دیکھنا ہے کہ ایسی صورت میں "رقبہ" کے مفہوم کی تعریف کیا اختیار کیجائے۔ اسے حاصل کرنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ دو مستقیم الاضلاع شکلیں بنائی گئی ہیں ایک منحنی شکل کے باہر اور دوسری اسکے اندر۔ پہلی شکل کے اندر یہ منحنی رقبہ شامل ہوتا ہے اور دوسری اس منحنی رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے۔ اندرونی شکل کے رقبہ کے لئے اوپری انتہا ہے اور بیرونی شکل کے لئے نچلی انتہا ہے۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ دونوں انتہائیں منطابق ہیں۔ اس مشترک انتہائی قیمت کو از روئے تعریف دی ہوئی منحنی الاضلاع شکل کے "رقبہ" کا ناپ اختیار کیا جاتا ہے۔

مثلاً دائرہ کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۷، دفعہ ۱۷) اگر ن ق اندرونی کثیر الاضلاع کا ضلع ہو تو کثیر الاضلاع کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ∑ و ل × ن ق ہوگا۔ اب و ل نصف قطر سے کم ہے اور ∑ ن ق دائرہ کے محیط سے کم ہے۔ اس لئے اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کی اوپر کی انتہا $\frac{1}{2}$ ا × ۲ π ا یا π ا² سے بڑھ نہیں سکتی جہاں دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے رقبہ کی نچلی انتہا π ا² سے کم نہیں ہو سکتی۔ علاوہ اس کے اندرونی اور متناظر بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا فرق ہے ∑ ن ل × ل ت اور یہ کم ہے ∑ (ن ل) × ص سے جہاں ص، ل ت کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔ چونکہ یہ اسقدر چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں اس لئے مذکورہ بالا اوپر کی اور نچلی انتہائیں مساوی ہیں، اس لئے ہر ایک π ا² کے مساوی ہے۔

اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ نیم قطر ا کے کسی دائرہ کے قطاع کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ا² طہ ہے جہاں طہ قطاع کا زاویہ ہے۔

۲۳۳ ۱۰۰ ۔ کارٹیزی محددوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ۔

اگر کارٹیزی محددوں میں منحنی کی مساوات

ما = فا (لا) .... (۱)

ہو تو منحنی، محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا رقبہ ہے

$\int_{ا}^{ب}$ فا (لا) ذلا یا $\int_{ا}^{ب}$ ما ذلا .... (۲)

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ فا (لا) اس نمونہ کا تفاعل ہے جسکا دفعہ ۹۰ میں ذکر کیا گیا۔ نتیجہ بالا پہلے دفعہ کی تعریف اور دفعہ ۹۰ کی تحقیق سے فوراً اخذ ہو جاتا ہے۔ اگر محور مائل ہوں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ـــــہ بنائیں تو عنصری مستطیل ما مف لا کی بجائے جو مجموعہ میں واقع ہوتے ہیں اور جنکی انتہا رقبہ ہے عنصری متوازی الاضلاع ما مف لا جب ـــــہ ہونگے۔ رقبہ جو منحنی، محور لا اور احاطہ کرنے والے دو معینوں کے درمیان

گھرا ہوا ہے اب ہوگا

$$\text{جب سہ} \int \text{ما فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جسے دئے ہوئے خاص حدود کے درمیان لینا چاہئے۔

شکل (۵۲)

مثال ۱ — ناقص $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$

کے ربع کا رقبہ دریافت کرو۔

$$\text{رقبہ مطلوبہ} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} \text{ما فرلا} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \int_{\cdot}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۴}\,\pi\,\text{ا}^2 \text{، اس}$$

محدود تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں معلوم کی گئی تھی۔

اس لئے کل ناقص کا رقبہ $= \pi\ \text{ا ب}$

مثال ۲ — قائم زائد $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$

کی مثبت شاخ کے لئے رکھو $\text{لا} = \text{جمز ع} \text{،} \quad \text{ما} = \text{جنز ع} \quad \ldots\ldots (۶)$

کیونکہ یہ (۵) کو پورا کرتی ہیں اور ایسے لا، ما کی قیمتوں کی مطلوبہ سمت پوری ہوتی ہے منحنی محور لا اور اس معین کے درمیان کا رقبہ جس کا تعین متغیر ع سے ہوتا ہے

$$\int_{\cdot}^{\text{لا}} \text{ما فرلا} = \int_{\cdot}^{\text{ع}} \text{جنز}^2\text{ع فرع} = \frac{۱}{۲} \int_{\cdot}^{\text{ع}} (\text{جمز ۲ ع} - ۱)\ \text{فرع}$$

$= \frac{۱}{۴}$ جبز ۲ ع ـ $\frac{۱}{۲}$ ع .... (۷)

ہے۔

شکل ۵۳

(۷) سے بائیں جانب کی شکل میں پ ا ن کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔
اس لئے زائدی قطاع و ا پ کا رقبہ ہے

$\frac{۱}{۲}$ پ ن × و ن ـ رقبہ پ ا ن = $\frac{۱}{۲}$ ع .... (۸)

ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں زائدی تفاعلوں جمز ع، جبز ع وغیرہ کے حیطہ ع اور دائری تفاعلوں جم طہ، جب طہ وغیرہ کے حیطہ طہ میں ایک مشابہت ہے۔ ہر صورت میں تغیر متبوع نقطہ پ کے جواب میں جس کے محدد (جمز ع، جبز ع) یا (جم طہ، جب طہ) ہیں قطاعی رقبہ ا و پ کے دوچند کو تعبیر کرتا ہے۔

عام قطع زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ .... (۹)

کی صورت میں مثبت شاخ پر کسی نقطہ کے محدد ہیں

لا = ا جمز ع، ما = ب جبز ع .... (۱۰)

اور قطاعی رقبہ $\frac{۱}{۲}$ ا ب ع ہے۔

مثال ۳ ـ قطع مکافی کی مساوات بلحاظ کسی قطر اور راس پر کے مماس کے ہے

ما^۲ = ۴ ا َ لا .... (۱۱)

۲۲۵

اس قطعہ مکافی کا رقبہ جسکو وتر لا = عا کاٹتا ہے یہ ہے

$$۲ جب سہ \int_{ب}^{عا} ما فرلا = ۴ ا^{\frac{1}{۲}} جب سہ \int_{ب}^{عا} لا^{\frac{1}{۲}} فرلا$$

$$= \frac{۸}{۳} ا^{\frac{1}{۲}} عا^{\frac{۳}{۲}} جب سہ = \frac{۴}{۳} عا بہ جب سہ$$

اگر ۲ بہ وتر کا طول ہو۔

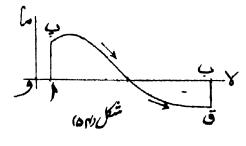
پس کسی قطعہ مکافی کا رقبہ اس مستطیل کے دو تہائی کے مساوی ہے جس کا ایک ضلع قطر پر وتر کا مقطوعہ (عا) ہے اور دوسرا مرتب پر وتر کا ظل (۲ بہ جب سہ) ہے۔

۱۰۱ ـ رقبہ کو کیا علامت دی جانی چاہئے؟

دفعہ ۱۰۰ میں چپکے سے یہ مان لیا گیا ہے کہ ب > ا اور معین فہ (لا) تکمل کی تمام وسعت میں مثبت ہے۔ اگر ان قیود کو چھوڑ دیا جائے تو باسانی معلوم ہوگا کہ تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ (لا) فرلا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

± س کے مساوی ہے جہاں س وہ رقبہ ہے جو منحنی، محور لا اور اطراف کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ مثبت علامت لینا چاہئے اگر پ سے ق کی

شکل (۵۴)

سمت میں جانے سے رقبہ دائیں جانب واقع ہو اور منفی علامت (-) لینا چاہیئے اگر رقبہ بائیں جانب واقع ہو جہاں پ ا، ق ب لا = ا، لا = ب کے جواب میں منحنی کے معین ہیں*۔ اگر منحنی ا اور ب کے درمیان محور لا کو کاٹتا ہے تو تکملہ سے رقبہ کا وہ اضافہ (مثبت یا منفی) حاصل ہوتا ہے جو دائیں طرف والے رقبہ کو بائیں طرف والے رقبہ پر ہے۔
ان تعمیمات کے ساتھ بھی ضابطہ

$$\int_{ا}^{ب} \text{فہ}(\text{لا})\ \text{فرلا} = \pm\ \text{س} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

کا اطلاق صحیح طور پر اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ تمام وقفہ ب۔ا بھر میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما یا فہ (لا) کی ایک یگانہ قیمت ہو۔ اگر لا کی بجائے ایک اور مقدار ت، متبوع متغیر قرار دیجائے اور یہ ایسی ہو کہ جیسے ت بڑھے اس کا متناظر نقطہ پ مسلسل طور پر منحنی کے ساتھ+ حرکت کرے تو ضابطہ

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} \text{ما}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\ \text{فرت} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

سے عام معنوں میں وہ رقبہ تعبیر ہو گا جو منحنی، محور لا اور نقاط پ، پ [جنکے لئے ت = ت اور ت = ت] کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یعنی

---

* یہ مان لیا گیا ہے کہ محاور لا، ما کی سمتیں وہ ہیں جو شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ مقابل صورت میں الفاظ "دائیں"، "بائیں" کو باہم بدل دینا چاہیئے۔

\+ مثلاً نیا متغیر منحنی کی قوس مس لی جا سکتی ہے جسے منحنی کے کسی ثابت نقطہ سے ناپنا شروع کیا گیا ہو۔

شکل ۵۵

معیّن ما کے دائیں جانب حرکت کرنے سے جو رقبہ کا حصہ مرتسم ہوتا ہے اسکا اضافہ اُس رقبہ پر جو بائیں جانب حرکت کرنے سے مرتسم ہوتا ہے اس تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے یہ اس صورت میں ہوگا جبکہ ما مثبت ہو۔ اگر ما منفی ہو تو اس تکملہ سے رقبہ کی وہ زیادتی تعبیر ہوگی جو بائیں جانب کے مرتسم رقبہ کو دائیں جانب کے مرتسمہ رقبہ پر حاصل ہے۔

اگر ت کی کسی قیمت کے لئے، پ ایک بند منحنی مرتسم کرکے اپنے پہلے مقام پر واپس آجائے تو تکملہ

$$\int ما \frac{فرلا}{فرت} فرت \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

کو مناسب حدود کے درمیان لینے سے منحنی کے اندر کا رقبہ حاصل ہوگا اور اسکی علامت + یا − ملے گی بموجب اس کے کہ رقبہ پ کے دائیں یا بائیں جانب رہے جبکہ نقطہ ت کے بدلنے کے ساتھ منحنی مرتسم کرے۔† اگر منحنی اپنے آپ کو کاٹے تو ضابطہ (۴) سے گھرے ہوئے رقبوں کی وہ زیادتی حاصل ہوگی جو دائیں

† دفعہ ۸۹ میں نمائندہ تصویر کا حوالہ دیا گیا ہے بھاپ نے فشارہ (پسٹن) پر آگے کی مار میں جو کام کیا اسکی زیادتی اُس کام پر جو پیچھے وار مار میں بھاپ خارج کرنے میں ہوا اُس رقبہ سے تعبیر ہوتی ہے جو منحنی کے اندر گھرا ہوا ہے۔ پس اس رقبہ سے وہ خالص توانائی حاصل ہوتی ہے جو فشارہ کو ایک پوری ضرب میں دی گئی۔

طرف کے رقبوں کو بائیں طرف کے رقبوں پر حاصل ہے۔ (دیکھو شکل ۵۵)
بعض اوقات منحنی کا رقبہ معلوم کرنے میں یہ زیادہ سہولت مند ہوتا ہے کہ لا کی بجائے ما کو متغیر متبوع مانا جائے۔ ایسی صورت میں رقبہ جو منحنی، محور ما اور خطوط ما = ھ، ما = ک کے درمیان گھرا ہوا ہے صریحاً اسی قسم کی قیود کے تابع ذیل کے تکملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ھ}^{ک} لا \; فر ما \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

زیادہ عام ضابطہ (۳) کے جواب میں یہ ہوگا

$$\int_{ت'}^{ت''} لا \frac{فر ما}{فر ت} فر ت \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

معائنہ سے معلوم ہوگا کہ علامت کا قاعدہ الٹ دیا جانا چاہئے۔

اگر ایسا کیا جائے تو جملہ $\frac{۱}{۲}\int \left(لا \frac{فر ما}{فر ت} - ما \frac{فر لا}{فر ت} \right) فر ت \ldots (۷)$
سے بند منحنی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جہاں ت کے حدود ایسے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) اپنے ابتدائی مقام پر واپس آجاتا ہے۔ اب علامت کا کلیہ یہ ہے کہ جملہ (۷) مثبت ہوتا ہے جبکہ رقبہ، ت کے بڑھنے کی سمت میں حرکت کرنے والے نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

۱۰۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے رقبے۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں

$$ر = فہ (طہ) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (آ)$$

ہو تو رقبہ جو منحنی اور دو سمتی نیم قطروں طہ = عہ، طہ = بہ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{ر}^2 \,\text{فر طہ} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} [\text{فہ (طہ)}]^2 \,\text{فر طہ} \quad \ldots (۲)$$

کیونکہ جیسا ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے ہم دائروں کے قطاعوں کی مدد سے گھرنے والا رقبہ س اور گھرا ہوا رقبہ س مرتب کر سکتے ہیں۔ اِن میں سے کسی ایک قطاع کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ر²مف طہ ہے جہاں رِ اس کا نصف قطر ہے اور مف طہ اسکا زاویہ اور اسلئے قطاعوں کے کسی ایک سلسلہ کا مجموعہ اس نمونہ کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

و

شکل (۵٦)

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{ر}^2\text{مف طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس لئے سلسلہ کی یگانہ انتہا ہے جو (۲) سے تعبیر ہوتی ہے۔

یہاں مان لیا گیا ہے کہ بہ > عہ اور مبدأ میں سے گذرنے والا کوئی سمتی نیم قطر قوس کو صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ لیکن اگر ایک نیا متغیر متبوع ت ایسا داخل کیا جائے کہ ت کے بڑھنے سے متناظر نقطہ پ منحنی پر مسلسل طور سے حرکت کرے تو جملہ

$$\frac{1}{2}\int_{\text{ت.}}^{\text{ت}} \text{ر}^2 \,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\,\text{فر ت} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

۲۲۸

خالص اس رقبہ کو تعبیر کرے گا جو سمتی نیم قطر ت کے ت. سے ت تک جانے میں عبور کرتا ہے یعنی اس جملہ سے رقبہ کے اُن حصوں کا اضافہ (مثبت یا منفی) جو طہ کے بڑھنے کی سمت میں سمتی نیم قطر کے حرکت کرنے سے مرتسم ہوتے ہیں اُن حصوں پر جو

مقابل سمت میں مرتسم ہوتے ہیں تعبیر ہوگا۔ علاوہ اس کے اگر ت کے بڑھنے سے نقطہ پ ایک بند منحنی مرتسم کرکے واپس اپنی ابتدائی حالت میں آجائے تو جملہ

$$\frac{۱}{۲} \int ر^۲ \frac{فرطہ}{فرت} فرت \quad ....(۵)$$

سے ت کے مناسب حدود کے درمیان عام معنون میں وہ رقبہ ملے گا جو منحنی سے گھرا ہو یعنی (ت کے بدلنے کے ساتھ جیسے نقطہ پ منحنی مرتسم کرتا ہے) اس نقطہ پ کے بائیں جانب جو رقبہ واقع ہوتا ہے اُس کی زیادتی اُس رقبہ پر جو اثنائے حرکت میں دائیں جانب واقع ہوتا ہے (یہ زیادتی) اس جملہ (۵) سے تعبیر ہوتی ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۱ کے ساتھ۔

یہ دیکھا جائے کہ ضابطہ (۵) دفعہ ۱۰۱ کے ضابطہ (۷) کا مماثل ہے۔
اگر دو ساتھ کے نقطوں پ اور ق کے محدد بالترتیب (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو عنصری مثلث و پ ق کا رقبہ، علامت کی قرارداد کے ماتحت تحلیلی ہندسہ کے ایک ضابطہ کی رو سے یہ ہے

$$\frac{۱}{۲} (لا مف ما - ما مف لا)$$

ہماری موجودہ ترقیم میں $\frac{۱}{۲} ر^۲ مف طہ$ سے وہی چیز تعبیر ہوتی ہے
مثال ۱۔ دائرہ $ر = ۲ ا جب طہ \quad ....(۶)$
کا رقبہ (دیکھو شکل ۳۸ دفعہ ۶۳) ہے

$$\frac{۱}{۲} \int^{\pi} ر^۲ فرطہ = ۲ ا^۲ \int^{\pi} جب^۲ طہ فرطہ = \pi ا^۲ \quad ...(۷)$$

دراصل یہ محض تصدیق ہے یا مثلثی تکملہ کی قیمت نئی طرح سے دریافت کرنا ہے۔
مثال ۲۔ قطع مکافی

$$ر = \frac{۲ ا}{۱ + جم طہ} \quad ....(۸)$$

کے قطاع کا رقبہ دو ماسی قطروں کے درمیان یہ ہے

$$\frac{1}{2}\int ر^2 فر طہ = \frac{1}{2} ا^2 \int قط^4 \frac{طہ}{2} فر طہ = \frac{1}{2} ا^2 \int (1 + مس^2 \frac{طہ}{2}) قط^2 \frac{طہ}{2} فر طہ$$

$$= \frac{1}{2} ا^2 \left[مس \frac{طہ}{2} + \frac{1}{3} مس^3 \frac{طہ}{2} \right] \ldots\ldots (9)$$

جسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اگر حدود $-\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ ہوں تو اس حصہ کا رقبہ ملتا ہے جسے وتر خاص کاٹتا ہے جو $\frac{4}{3} ا^2$ ہے۔

۲۳۹

مثال ۳۔ قطبی محددوں میں قطع ناقص کی مساوات ہے

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{جم^2 طہ}{ا^2} + \frac{جب^2 طہ}{ب^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

اس لئے رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{ا^2 ب^2 فر طہ}{ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ} = 2 ا^2 ب^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{فر طہ}{ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ}$$

$$\ldots\ldots\ldots (11)$$

آخری تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں $\frac{\pi}{2} / (ا ب)$ معلوم کی گئی ہے۔ اس لئے مطلوبہ رقبہ π ا ب ہے۔

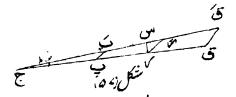
۱۰۳۔ رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔

ایک متحرک خط جس کا طول مستقل یا متغیر ہے اپنی حرکت سے ایک سطح مستوی میں جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس طرح محسوب ہو سکتا ہے۔

خط کے دو متصل مقام پ ق اور پَ قَ ہیں اور ان کی سمتیں ج پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ پ پَ اور ق قَ کے وسطی نقطے ر اور رَ ہیں اور ر س ایک دائرہ کی قوس ہے جو ج کو مرکز مان کر کھینچی جائے اگر زاویہ پ ج پَ کو مف طہ سے تعبیر کیا جائے تو آخرالامر

رقبہ پ ق قَ پَ = △ ق ج قَ - △ پ ج پَ

= ½ ج ق^2 × مف طہ - ½ ج پ^2 × مف طہ
= پ ق × ½ (ج پ + ج ق) مف طہ
= پ ق × ج ر × مف طہ - پ ق × ر س

شکل (۵۷)

اگر طول پ ق کو ع سے تعبیر کیا جائے اور ر کے عنصری ہٹاؤ کو مف ثہ سے جہاں یہ ہٹاؤ متحرک خط کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے تو رقبہ جو عبور ہوا اس ضابطہ سے تعبیر ہوگا

∫ ع مف ثہ .... (۱)

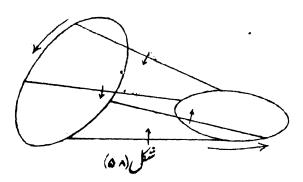
یہ توجہ کے قابل ہے کہ دفعات ۱۰۰، ۱۰۲ کے ضابطے اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں۔ شلاً دفعہ ۱۰۰ (۳) حاصل ہوگا اگر رکھیں

ع = ما، مف ثہ = مف لاجب سہ

مندرجہ بالا میں یہ خاموشی سے مان لیا گیا ہے کہ رقبے ہمیشہ ایک ہی سمت میں عبور ہوتے ہیں۔ لیکن یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۱) بغیر کسی ایسی قید کے لگ سکیگا بشرطیکہ رقبوں کو مثبت شمار کیا جائے جبکہ یہ خط کے اس جانب عبور ہوں جس جانب مف ثہ کو مثبت خیال کیا جاتا ہے اور اسکی متقابل سمت میں منفی۔ شلاً جو رقبہ ایک ایسا خط مستقیم عبور کرتا ہے جس کا وسطی نقطہ ثابت ہے اس حساب کے مطابق صفر ہوگا۔ ۲۴۰

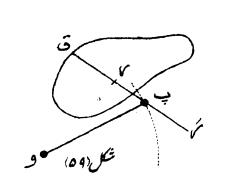
تعین کی خاطر ہم فرض کرینگے کہ مف ثہ اس صورت میں مثبت ہے جبکہ ر کی حرکت بلحاظ ایک مشاہد کے جو پ سے ق کی جانب سیدھا ایک خط مستقیم میں دیکھ رہا ہے پ ق کے بائیں جانب ہے۔ اگر پ ق کے

سرے دو بند منحنیوں کو مرتسم کریں اور آخیر میں پ ق اپنے اصلی مقام پر آجائے تو اوپر کی قرارداد کے موافق، ق کے راستہ سے جو رقبہ محیط ہوتا ہے اسکی زیادتی اُس رقبہ پر جو پ کے راستہ سے محیط ہوتا ہے اس تکملہ (۱) سے تعبیر ہوگی بشرطیکہ اِن رقبوں کی علامتیں دفعہ ۱۰۲ کے قاعدہ کے مطابق ہوں۔

شکل (۵۸)

۱۰۴ - ایمسلر کے سطح پیما (Amsler's planimeter) کا نظریہ -

سطح پیما ایک آلہ ہے جس کی مدد سے کاغذ پر کھنچی ہوئی کسی شکل کا رقبہ آلی یا میلی طریقہ پر دریافت کیا جاتا ہے۔

ایسے کئی آلات ایجاد ہوئے ہیں* لیکن سب سے سادہ اور مقبول ایمسلر کا سطح پیما ہے جو ۱۸۵۴ء میں ایجاد ہوا۔ ایمسلر شاف ہاسن (سوئزرلینڈ) کا رہنے والا تھا۔ یہ آلہ دو سلاخوں و پ، پ ف پر مشتمل ہے جو آزادانہ طور پر پ پر وصل کی جاتی ہیں۔ سلاخ و پ ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھوم سکتی ہے۔ اگر ایک مرتسم نقطہ (پنسل) سلاخ پ ق کے ساتھ ق پر

* دیکھو Henrici, 'Report on Planimeters' British Ass. Rep. 1894, p. 496.

۲۲۱

لگا دیا جائے اور اس کو ایک بند منحنی کے گرد پھرایا جائے تو پ ایک دائرہ کی قوس پر آگے پیچھے اہتزاز کرے گا گویا یہ صفر رقبہ کا احاطہ طے کرے گا۔ اسلئے دفعہ ۱۰۳ کے آخر میں جو مسئلہ بیان ہوا اس کے مطابق

شکل (۵۹)

ق نے جو رقبہ مرتسم کیا وہ مساوی ہوگا

$\int$ ل فرشہ .... (۱)

کے جہاں پ ق کا طول ل ہے اور $\int$ فرشہ سے پ ق کے وسطی نقطہ م کی کلی حرکت تعبیر ہوتی ہے جبکہ ہمیشہ اس کا پ ق کے عمود کی سمت میں اندازہ کیا جائے*۔

اب جیسا کہ آلہ کے حقیقی استعمال میں عام طور پر ہوتا ہے اگر پ ق پورا چکر لگانے کے بغیر اپنے اصلی مقام پر واپس آجائے تو م کی کُلّی حرکت پ ق پر عمود وار سمت میں وہی ہوگی جو خط پ ق کے کسی اور نقطہ مثلاً مَ کی ہے۔ کیونکہ اگر م، مَ کے راستوں کے متناظر اجزا مف شہ مف شہَ ہوں جنہیں اوپر کی طرح ناپا گیا ہے تو

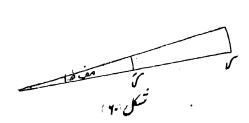
مف شہ ـ مف شہَ = مَ م مف طہ

جہاں مَ م کے متصل مقامات کے درمیان زاویہ مف طہ ہے۔ اسلئے

$\int$ مف شہ = $\int$ مف شہَ + مَ م $\int$ مف طہ = $\int$ مف شہَ ... (۲)

کیونکہ مفروضہ حالات کے ماتحت $\int$ مف طہ = ۰

* بالعموم یہ وہی بات نہیں ہے جو م کے راستہ کا طول۔

شکل (۶۰)

آلہ کی حقیقی ساخت میں پہیے کی طرف خارج کئے ہوئے خط ق پ پر کے نقطہ ر کی تکملی یا کلی حرکت، سلاخ کے عمود وار ایک چھوٹے پہیہ کے ذریعہ درج (Record) کی جاتی ہے جہاں پہیہ کا محور پ ق کی سمت میں ہوتا ہے جیسے ق کوئی منحنی مرتسم کرتا ہے۔ پہیہ کاغذ کی سطح میں جس پر منحنی کھینچا ہوا ہے تھوڑا لڑکتا ہے اور تھوڑا پھسلتا ہے اور پہیہ کا گھومنا ر کے عمودی ہٹاؤ کے عین متناسب ہے۔ پہیے پر درجے لگے ہوتے ہیں اور جزوی گردشوں کے ریکارڈ کے لئے ایک ثابت نمائندہ ہوتا ہے۔ پوری گردشیں ایک Dial and counter کی مدد سے ناپی جاتی ہیں۔

طول پ ق کے بدلنے کے لئے بھی انتظام ہوتا ہے۔ اس سے محض اندراج کا پیمانہ بدلتا ہے۔

زیادہ برجستہ ثبوت تحلیلی طریق پر ہے۔ و میں سے قائم محور لو، فرض کرو کہ و پ، پ ق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب زاوئے طا اور فا بناتے ہیں، رکھو و پ = ا، پ ق = ل تو ق کے محدد حسب ذیل ہیں

۲۴۲

لا = ا جم طا + ل جم فا، ما = ا جب طا + ل جب فا ..(۳)

اسلئے لا مف ما - ما مف لا = (ا جم طا + ل جم فا) (ا جم طا مف طا + ل جم فا مف فا)

+ (ا جب طا + ل جب فا) (ا جب طا مف طا + ل جب فا مف فا)

= ا² مف طا + ل² مف فا + ا ل جم (فا - طا) (مف طا + مف فا)

= مف {ا۲ طہ + ل۲ فہ + ۲ ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ۲ ا ل جم (فہ - طہ) مف طہ ..... (۴)

پ ق میں کے کسی نقطہ ر کا صغاری ہٹاؤ مف ثہ ' جسے پ ق پر عمود دار ناپا جائے دو ہٹاؤں سے مرکب ہوگا ' ایک ہٹاؤ پ کے لحاظ سے ' دوسرا خود پ کا ہٹاؤ جسے پ ق کی عمود وار سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اسلئے اگر پ ر = ب تو

مف ثہ = ب مف فہ + ا مف طہ × جم (فہ - طہ) ..... (۵)

اس لئے ۱/۲ (لا مف ما - ما مف لا)

= ۱/۲ مف {ا۲ طہ + ل (ل - ب) فہ + ۲ ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ل مف ثہ .... (۶)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ق اس طور پر پورا حلقہ مرتسم کرے کہ طہ اور فہ واپس اپنی ابتدائی قیمتوں پر عود کریں تو

۱/۲ ∫ (لا مف ما - ما مف لا) = ∫ ل مف ثہ ..... (۷)

دائیں جانب کا جملہ دفعہ ۱۰۱ (۷) کی رو سے اس رقبہ کے مساوی ہے جو حلقہ سے گھرا ہوا ہے۔

۱۰۵ - مجسموں کے حجم۔ ایسے مجسم کے "حجم" کی بھی عام تعریف کرنا جو بالتمام مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو کسی نہ کسی شکل میں "انتہائی قیمت" کے تخیل کو داخل کئے بغیر ناممکن ہے۔

اقلیدسی طریقوں سے یہ ضرور ثابت ہوسکتا ہے کہ دو قائم متوازی السطوحوں کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان نسبتوں سے مرکب ہوتی ہے جو ایک کے تین متراکز کناروں کو ایک ایک کرکے دوسرے کے تین متراکز کناروں کے ساتھ (نسبتیں) ہوں۔ اور زیادہ عام طور پر دو منشوروں

کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ اُن کے ارتفاعوں کی نسبت اور ان کے قاعدوں کی نسبت سے مرکب ہوتی ہے۔ اس طریق پر کسی منشور اور اکائی مکعب کی باہمی نسبت کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

لیکن ایک دئے ہوئے کثیر السطوح کو منشوروں کی محدود تعداد میں کاٹنا عام طور پر ممکن نہیں۔ سادہ اور عام طریقہ یہ ہے کہ اس کو مضلع مخروطوں (میناروں) میں کاٹا جائے جن کے مشترک راُس اندر کے کسی نقطہ ۹ پر ملیں اور کثیر سطحی کے چہرے ان کے قاعدے ہوں۔ لیکن مینار اور منشور کے حجموں کا مقابلہ بغیر انتہائی قیمت کے تخیل کو داخل کرنے کے نہیں ہو سکتا۔ مثلثی منشور کو البتہ مساوی ارتفاع اور مساوی قاعدوں والے تین میناروں میں کاٹا جاسکتا ہے (اقلیدس م۱۲ شق ۷) ۳۴۴ لیکن صفاری عناصر کے تخیل کو شامل کئے بغیر ان میناروں کو آپس میں مساوی ثابت نہیں کیا جاسکتا۔

ایسے مجسم کے حجم کی عام تعریف جو کسی طرح کی سطحوں مستوی یا منحنی سے گھرا ہوا ہو ایسے ہی مرتب ہو سکتی ہے جیسے مستوی شکل کے رقبہ کی صورت میں (شکل ۹۹)۔ ہمیشہ دو شکلیں بنانا ممکن ہوگا جو منشوروں سے بنی ہوئی ہوں، ان میں سے ایک دئے ہوئے مجسم کو گھیرے اور دوسری مجسم سے گھری ہوئی ہو اور ان کے حجموں کا فرق اتنا کم ہو جتنا ہم چاہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کے حجم کی انتہائی قیمت کو جب ان شکلوں کا فرق لاانتہا کم ہو جائے بطور تعریف کے اختیار کر لیا جاتا ہے کہ یہ دئے ہوئے مجسم کا "حجم" ہے۔ پہلے کی طرح ہم اس امر کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے۔

مستوی متوازی سروں والے کسی اسطوانہ (قائم یا مائل) کا حجم کسی سرے کے رقبہ اور سروں کے درمیان کے عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ کیونکہ حائط اور نیز محیط منشوری شکلیں بنائی جاسکتی ہیں جنکے قاعدے ایسے کثیر الاضلاع ہیں جو اسطوانہ کے قاعدہ کا احاطہ کرتے ہیں اور اس سے محیط ہو جاتے ہیں۔ اوپر کا بیان ان میں سے ہر شکل کے لئے درست ہے۔ اسلئے انتہا لینے سے اسطوانہ کے لئے بھی درست ہے۔ دائری اسطوانہ کا حجم اسلئے π ا۲ ف ہے

جہاں ا قاعدہ کا نصف قطر ہے اور ف اس کا ارتفاع۔ اس طرح متوازی مستوی سروں والے اسطوانہ کا حجم معلوم ہوگیا۔ اب اگر ہم چاہیں تو بطور ضمنی اشکال کے جو اوپر عام تعریف میں استعمال کی گئی ہیں منشوروں کی بجائے ایسے اسطوانے استعمال کر سکتے ہیں۔ کسی طریقہ سے بھی آخری انتہا لازماً وہی ہونی چاہیئے۔

۱۰۶ - کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ۔

محور لا کو کسی مناسب سمت میں کھینچ لیا جائے۔ مبدأ سے فاصلہ لا پر ایک سطح مستوی لیکر جو محور پر عمود ہو اگر مجسم کو تراشا جائے تو فرض کرو کہ اس تراش کا رقبہ ف (لا) ہے۔ اگر وقفہ مف لا پر محور لا کے عمود دار مستوی سطحوں کا نظام کھینچا جائے تو ظاہر ہے کہ حجم مطلوبہ ذیل کے مجموعہ کی انتہا ہوگی

$$\sum \text{ف (لا) مف لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کیونکہ اس مجموعہ کا ہر جزو ایک اسطوانہ کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کا ارتفاع مف لا ہے اور قاعدہ ف (لا)۔ اسلئے حجم مطلوبہ حاصل ہوگا اس ضابطہ سے

$$\int \text{ف (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں لا کو مناسب حدود کے اندر لیا جانا چاہیئے۔

۲۴۴ مثال ا - مخروط (یا مینار) کی صورت میں جو قائم یا مائل ہو اور کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مبدأ و راس پر لو اور محور لا قاعدہ پر عمود دار۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ ا ہے، اور ارتفاع ف تو مبدأ و سے فاصلہ لا پر تراش کا رقبہ

$$\text{ف (لا)} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{2} \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

کیونکہ متشابہ رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ اس لئے حجم

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ف}^{2}} \int_{\text{۰}}^{\text{ف}} \text{لا}^{2} \text{ فرلا} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3} \text{ف ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

یعنی قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے ایک تہائی کے مساوی ہے ۔

مثال ۲۔ چارسطحی کا حجم ہے $\frac{1}{6}$ ص ا اَ جب عہ .... (۵)

جہاں ا، اَ متقابل کے کناروں کے طول ہیں، ص ان کے درمیان کم سے کم فاصلہ ہے اور عہ انکی سمتوں کے درمیان زاویہ ہے ۔

شکل (۶۱)

چارسطحی کو سروں ا، اَ کے متوازی سطحوں سے تراش کر باریک پتروں یا چادروں میں تقسیم کرو۔ یہ تراشیں کم سے کم فاصلہ ص پر عمود وار ہونگی۔ شکل (۶۱) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ نظام کے اُس مستوی کی تراش جو سرے ا سے فاصلہ لا پر واقع ہے ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی جس کے اضلاع ہیں

$$\frac{لا}{ص} \times اَ \quad \text{اور} \quad \frac{ص - لا}{ص} \times ا$$

اور اس کا رقبہ ہے $\frac{ا\,اَ\,لا}{ص^2}$ (ص - لا) جب عہ

اس لئے چارسطحی کا حجم ہے $= \frac{ا\,اَ}{ص^2}$ جب عہ $\int_{0}^{ص}$ لا (ص - لا) فرلا

جو دی ہوئی قیمت میں تحویل ہو جاتا ہے۔

۱۰۷ - گردشی مجسم - فرض کرو کہ تکوینی منحنی

$$\text{ما} = \text{فما}\,(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے، محور لا تشاکل کا محور ہے اور مجسم مستوی سیروں سے گھرا ہوا ہے جو محور لا پر عمود ہیں۔ اس صورت میں رقبہ ف (لا) اس دائرہ کا رقبہ ہے جس کا نیم قطر ما ہے اور یہ π ما² ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ حجم ہے

$$\int \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ دراصل اس مجموعہ کا ہر عنصر، جس کی انتہا اوپر کا تکملہ ہے ایک گول تختی کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کی موٹائی مع لا ہے اور رقبہ π ما²۔

مثال ۱- دائرہ کی مساوات جبکہ مبدأ اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ہو یہ ہے

$$\text{ما}^2 = \text{لا}\,(۲\,\text{ا} - \text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس لئے قطعہ کرہ کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_0^{\text{ف}} \text{لا}\,(۲\,\text{ا} - \text{لا})\, \text{فرلا} = \pi \left[\text{ا}\,\text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^3}{۳}\right]_0^{\text{ف}}$$

$$= \pi\, \text{ف}^2 \left(\text{ا} - \frac{\text{ف}}{۳}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں ا کرہ کا نیم قطر ہے۔ پورے کرہ کے لئے ف = ۲ا اور حجم ہے $\frac{۴\,\pi\,\text{ا}^3}{۳}$

یا حائط مستدیر اسطوانہ کے حجم (π ا² × ۲ا) کا دو تہائی۔

مثال ۲- منحنی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$

کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مکافی نما پیدا ہوتا ہے اس کے قطعہ یا حصے کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_{\text{ب}}^{\text{ف}} \text{ما}^2 \, \text{ڈلا} = \text{۴} \text{ا} \pi \left[\frac{\text{لا}^2}{2} \right]_{\text{ب}}^{\text{ف}} = 2\pi \text{ا} \text{ف}^2 \ldots\ldots (6)$$

اگر قاعدہ کا نیم قطر ب ہو تو $\text{ب}^2 = \text{۴ا ف}$ ۔ اس لئے حجم ہے $\frac{1}{2}\pi \text{ب}^2 \times \text{ف}$ یا اسی قاعدہ اور اسی بلندی کے اسطوانہ کے حجم کا آدھا۔

مثال ۳۔ لنگر چھلے کا حجم دریافت کرو جو دائرہ

$$\text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{ا})^2 = \text{ب}^2 \ldots\ldots\ldots (7)$$

کو محور لا کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے جہاں ا > ب دیکھو شکل (۲۲)۔ -ب اور ب کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں فرض کرو ما_1، ما_2 یعنی

$$\text{ما}_1 = \text{ا} + \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \,,\quad \text{ما}_2 = \text{ا} - \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \ldots\ldots (8)$$

چھلے کی تراش کا رقبہ جبکہ اسے محور لا پر عمود وار مستوی سے کاٹا جائے ہوگا

$$\pi \text{ما}_1^2 - \pi \text{ما}_2^2 = 4\pi \text{ا} \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \ldots\ldots (9)$$

اور مطلوبہ حجم ہے $4\pi \text{ا} \int_{-\text{ب}}^{\text{ب}} \sqrt{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \, \text{ڈلا} = 2\pi^2 \text{ا} \text{ب}^2 \ldots\ldots (10)$

دفعہ ۹۶ مثال ۵ کی رو سے۔

یہ حجم اس اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کی تراش ($\pi \text{ب}^2$) چھلے کی تراش کے مساوی ہو اور جس کا طول ($2\pi \text{ا}$) اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہو جو تکوینی دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۱۰۸۔ بعض متعلق صورتیں۔ دفعہ ۱۰۶ کے عام ضابطہ (۲) کی اور مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص مکافی نما

$$2\text{لا} = \frac{\text{ما}^2}{\text{پ}} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ق}} \ldots\ldots\ldots (1)$$

کی تراش مستوی لا = مستقل سے ایک ناقص ہے جس کے نیم محور $\sqrt{2\text{پ لا}}$ اور

$2\sqrt{ق\,لا}$ ہیں اور اس لئے اسکا رقبہ $2\pi\sqrt{پ\,ق\,لا}$ ہے۔

اس لئے مستوی لا = ف۱ مجسم سے جو قطعہ کاٹتا ہے اس کا حجم ہے

$$2\pi\sqrt{پ\,ق}\int_{0}^{ف_1} لا\,فرلا = \pi\sqrt{پ\,ق}\,ف_1^2 \quad ....(۲)$$

یہ اُس اسطوانہ کے نصف حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ف۱ ہو اور وہ اسی ناقصی قاعدہ پر قائم ہو۔

مثال ۲۔ ناقص نما

$$\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1 \quad ....(۳)$$

میں مستوی لا = مستقل سے تراش ایک ناقص ہے جس کے نیم محور ہیں

$$ب\sqrt{1-\frac{لا^2}{ا^2}} \quad \text{اور} \quad ج\sqrt{1-\frac{لا^2}{ا^2}} \quad ....(۴)$$

اور جس کا رقبہ ہے

$$\pi\,ب\,ج\left(1-\frac{لا^2}{ا^2}\right) \quad ....(۵)$$

۲۲ کسی دو مستویوں کے درمیان کے حصہ کا حجم جبکہ یہ مستوی محور لا پر عمود وار ہوں یہ ہے

$$\pi\,ب\,ج\int^{لا_2}\left(1-\frac{لا^2}{ا^2}\right)فرلا \quad ....(۶)$$

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ کل حجم کے لئے لا کے حدود $\pm$ ا ہیں اور کل حجم ہے $\frac{4}{3}\pi\,ا\,ب\,ج$۔

۱۰۹ – سمپسن کا قاعدہ۔ اوپر کے اکثر نتائج دراصل ایک عام ضابطہ میں شامل ہیں جو ایسی تمام صورتوں میں لگ سکتا ہے جہاں محور لا پر عمود وار مستوی تراش کا رقبہ لا کا دوسرے درجہ کا تفاعل ہو۔
ایسی صورت میں دو متوازی مستویوں کے درمیان کا حجم محض ان تراشوں

کے رقبوں اور ان کے عین درمیان کی تراش سے کے رقبے اور سروں کے مستویوں کے درمیان کے وقفے (۲ ف) کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے
چونکہ دو درجی تفاعل کی صورت، لا میں ایک مستقل جمع کرنے سے نہیں بدلتی، ہم مبدا کو بآسانی وسطی تراش میں لے سکتے ہیں۔ رکھو

$$ف(لا) = ا + ب لا + ج لا^{۲} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

اس طرح

$$\int_{-ف}^{ف} ف(لا)\, فرلا = ۲ اف + \frac{۲ ج ف^{۳}}{۳} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

تراشوں لا = - ف، لا = ۰، لا = ف کے رقبوں کو بالترتیب $س_{۱}$، $س_{۲}$، $س_{۳}$ سے تعبیر کرو، اس طرح

$$ا - ب ف + ج ف^{۲} = س_{۱}،\ ا = س_{۲}،\ ا + ب ف + ج ف^{۲} = س_{۳} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

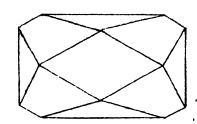
جس سے

$$\int_{-ف}^{ف} ف(لا)\, فرلا = \frac{۱}{۳} ف (س_{۱} + ۴ س_{۲} + س_{۳}) \qquad \ldots\ldots (۴)$$

یہی وہ ضابطہ ہے جسکی طرف اوپر اشارہ کیا گیا ہے۔ اسکی تعبیر یہ بھی ہو سکتی ہے کہ مجسم کی اوسط تراش ہے

$$\frac{۱}{۶} (س_{۱} + ۴ س_{۲} + س_{۳}) \qquad \ldots\ldots (۵)$$

یہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ (۱) میں رقم د $لا^{۳}$ کا اضافہ (۴) کی شکل پر کوئی اثر نہیں رکھیگا۔ پس اس نتیجہ کی توسیع ایسی صورت کے لئے بھی ہو گئی ہے جہاں ف (لا) تیسرے درجہ کا ہے۔
ضابطہ (۱) صریحاً مخروط، مخروط مضلع یا کرہ کی صورت میں لگ سکتا ہے نیز یہ مکافی نما، ناقص نما یا زائد نما کی صورت میں بھی لگ سکتا ہے بشرطیکہ

احاطہ کرنے والی تراشیں صدری محور پر عمود وار ہوں۔ جو طالب علم درجہ دوم کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے وہ آسانی سے دیکھ لیگا کہ یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ ایسے مجسم کی صورت بھی موجودہ قاعدہ کے تحت آتی ہے جہاں مجسم دو متوازی مستوی کثیرزاوی رخوں اور اطراف میں مستوی رخوں سے، جو مثلث ہوں یا منحرف گھرا ہوا ہو۔ اسمیں ہم وہ صورت بھی شامل کر سکتے ہیں جہاں بعض یا سب طرفی پہلو ایسی منحنی سطحیں ہوں (زائدی مکافی نما) جن کی تکوین خطوط مستقیم سے ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے مستویوں کے متوازی حرکت کرتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک خط دو ایسے خطوط مستقیم کو قطع کرتا ہے جن میں سے ہر ایک ایک کثیر الاضلاع کے ایک راس کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ایک راس سے ساتھ ملاتا ہے۔

شکل (۶۲)

شکل (۶۳)

اور چونکہ ہر کثیر الاضلاعی رخ میں اضلاع کی تعداد لاانتہا بڑھائی جا سکتی ہے، یہ قاعدہ اُس مجسم کی صورت میں بھی لگیگا جو دو مستوی متوازی رخوں سے اور ایک ایسی منحنی سطح سے گھرا ہوا ہو جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے اور یہ خط ہمیشہ اِن رخوں کے محیطوں سے ملتا ہے۔

مثال ۱۔ ناتکمل قائم مستدیر مخروط کا حجم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مستوی سروں کے نصف قطر ا، ب ہیں۔ تو وسطی تراش کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ (ا + ب) ہے۔ پس

$$\text{س}_1 = \pi\,\text{ا}^2 \,،\quad \text{س}_2 = \frac{\pi}{4}(\text{ا} + \text{ب})^2 \,،\quad \text{س}_3 = \pi\,\text{ب}^2$$

اس لئے حجم ہے $\frac{1}{3}\pi\,\text{ف}\,(\text{ا}^2 + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^2)$ ...... (۶)

جہاں ناتکمل کا ارتفاع ف ہے۔

مثال ۲۔ نصف قطر ا کے مجسم کرہ میں، نصف قطر ب کا ایک اسطوانی سوراخ مرکز میں سے برمایا گیا ہے۔ باقی ماندہ حجم دریافت کرو۔

یہاں $\text{س}_1 = 0 \,،\quad \text{س}_2 = \pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \,،\quad \text{س}_3 = 0$ ۔ ۲۴۹

اسلئے اوسط تراش $\frac{2}{3}\pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$ ہے۔ سوراخ کا طول $2\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ ہے۔ مطلوبہ حجم اس لئے ہے $\frac{4}{3}\pi(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{3}{2}}$ ...... (۷)

۱۱۰ ۔ منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا

مستقیم الاضلاع شکل کا محیط وہ طول ہے جو شکل کے مختلف اضلاع کے مساوی طول لیکر اِن کو ترتیب وار ایک ہی خط مستقیم میں سروں پر سرے رکھنے سے حاصل ہو۔

چونکہ منحنی خط خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو خط مستقیم کے کسی حصہ پر یوں منطبق نہیں کیا جا سکتا، اس لئے اِس امر کی تعریف مطلوب ہے کہ ایک منحنی کے "طول" سے کیا مراد ہے۔ عام طور پر یہ تعریف اختیار کیجاتی ہے کہ یہ طول اندر

بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا ہے جبکہ اضلاع کا طول لا انتہا کم ہو جائے۔ یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سوائے شاید تنہا نقطوں کے منحنی کا ڈھال مسلسل ہے یعنی کسی دو متصل نقطوں پ اور ق کے مماسوں کا باہمی میلان، ق کو پ کے کافی قریب لانے سے اتنا کم کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ خاص قیود کے ماتحت مذکورہ بالا انتہا یگانہ ہے، نیز یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ انتہا، باہر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کی متناظر انتہا کے مساوی ہے۔

اگر منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور ق کے کارٹیزی محدد (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو وتر پ ق کا طول ہے $\sqrt{(\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2}$

دفعہ ۵۶ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ محدود اور مسلسل ہوں تو نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$، پ اور ق کے درمیان منحنی کے کسی ایک نقطہ کے لئے مشتق تفاعل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت کے مساوی ہے۔ اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مناسب قیمت منتخب کرنے سے

$$\text{پ ق} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{مف لا}$$

اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی قیمت اس لئے یہ ہے

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

جبکہ اس تکمل کو لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اس امر کو کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے دفعہ ۹۰ میں ثابت کیا گیا ہے۔

اگر لا کو ما کا تفاعل خیال کیا جائے تو متناظر ضابطہ ہوگا

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^2}\ \text{فر ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

۲۵۰۔ منحنی کی قوس کو س سے تعبیر کرو جبکہ قوس کو ایک اختیاری نقطہ (لا) سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اور دفعہ ۲۰۶ کی مانند رکھو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس چہ تو مساوات (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{س} = \int^{\text{لا}}_{\text{لا}} \text{قط پہ فر لا} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

ضابطہ (۲) کے لئے مماثل استحالہ موجود ہے۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $\qquad \text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \qquad \ldots\ldots (۴)$

میں $\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{1 + \text{جبز}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\ \text{فر لا}$

$$= \int \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فر لا} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$$

چونکہ یہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس لئے سب سے نچلے نقطہ سے اگر س کو ناپا جائے تو

$$\text{س} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \qquad \ldots\ldots (۵)$$

مثال ۲۔ مکافی $\qquad \text{ما}^2 = ۴\,\text{ا لا} \qquad \ldots\ldots (۶)$

میں $\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا}}}\ \text{فر لا} \ldots (۷)$

شمار کنندہ کو پہلے منطق بنانے سے 'دفعہ ۶' کے طریقہ سے اسے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ یا رکھو لا = ا جبز^2 ع، اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$۲\,\text{ا} \int \text{جمز}^2 \text{ع فر ع} = \text{ا} \int (1 + \text{جمز } ۲\text{ع})\ \text{فر ع} = \text{ا} \left(\text{ع} + \tfrac{1}{۲}\ \text{جبز } ۲\text{ع}\right) \ldots (۸)$$

چونکہ ع، لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے، اس سے قوس کا طول ملتا ہے جبکہ قوس کو راس سے ناپا جائے۔

مثلاً وتر خاص یا معدل کے سرے پر جبز ع = ۱، جمن ع = $\sqrt{۲}$،
ع = لوک (۱ + $\sqrt{۲}$)، جس سے قوس کا طول اس سرے تک ہے
½ [لوک (۱ + $\sqrt{۲}$) + $\sqrt{۲}$] = ۱٫۱۴۷۷۹۶

۱۱۱ ـ تعمیم شدہ ضابطے ـ یہ اوپر کی تعریف کا نتیجہ ہے کہ کسی منحنی کی لاانتہا چھوٹی قوس، وتر پ ق کے ساتھ انتہا میں نسبت مساوات رکھتی ہے ـ

۲۵۱ اس مسئلہ کے باضابطہ ثبوت کے لئے جو دفعہ ۲۲ (۲) کی تعمیم ہے فرض کرو کہ پ پ$_{۱}$، پ$_{۱}$ پ$_{۲}$، ....، پ$_{ن-۱}$ ق کھلے کثیر الاضلاع کے ضلعے ہیں جو قوس کے اندر بنایا گیا ہے اور صہ$_{۱}$، صہ$_{۲}$، صہ$_{۳}$، ......صہ$_{ن}$ وہ زاوئے (مثبت، منفی) ہیں جو یہ ضلعے وتر پ ق کے ساتھ بناتے ہیں ـ یہ ظاہر ہے کہ

پ ق < پ پ$_{۱}$ + پ$_{۱}$ پ$_{۲}$ + ... + پ$_{ن-۱}$ ق ..... (۱)

بخلاف اس کے

پ ق = پ پ$_{۱}$ جم صہ$_{۱}$ + پ$_{۱}$ پ$_{۲}$ جم صہ$_{۲}$ + ... + پ$_{ن-۱}$ ق جم صہ$_{ن}$

> (پ پ$_{۱}$ + پ$_{۱}$ پ$_{۲}$ + ... + پ$_{ن-۱}$ ق) جم صہ ... (۲)

جہاں مطلق قیمت کے لحاظ سے صہ تمام زاویوں صہ$_{۱}$، صہ$_{۲}$، ... صہ$_{ن}$ سے بڑا ہے ـ اس لئے نسبت

$$\frac{\text{پ ق}}{\text{پ پ}_{۱} + \text{پ}_{۱}\,\text{پ}_{۲} + \ldots \text{پ}_{ن-۱}\,\text{ق}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ایک اور جم صہ کے درمیان واقع ہے ـ چونکہ وتر پ پ$_{۱}$، پ$_{۱}$ پ$_{۲}$... پ$_{ن-۱}$ ق نیز پ ق اپنی قوسوں کے متوازی ہیں جو ان کے مختلف سروں کے درمیان کے نقطوں پر کھینچے جائیں اسلئے ڈھال کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق کو پ کے کافی طور پر قریب لینے سے | صہ | اتنا چھوٹا کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں ـ اسلئے اس کی انتہائی قیمت ایک ہے ـ

دفعہ سابق کے (۳) کو بلحاظ تکمل کی اوپر کی حد (لا) کے تفرق کرنے سے اسکی باسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا} \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} = \text{قط پہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

چونکہ جب، ق کو پ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے وتر پ ق کی مف لا کے ساتھ جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت قط پہ ہے اسلئے انتہا میں

$$\text{نہا} \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اوپر کے اصول سے کئی ضروری ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ سب سے پہلے اگر منحنی کے کسی نقطہ پ کے محدد لا، ما کو منحنی س کے تفاعل خیال کئے جائیں تو شکل ۱۹ دفعہ ۲۴ کے بموجب

$$\text{جم ق پ ر} = \frac{\text{پ ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{جب ق پ ر} = \frac{\text{ق ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{جم پہ} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} ، \quad \text{جب پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}\right)^۲ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}\right)^۲ = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

نیز اگر لا، ما کسی اور متغیر ت کے تفاعل ہوں تو

$$\text{پ ق} = \sqrt{\left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}\right)^۲ + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}}\right)^۲} \ \text{مف ت}$$

$$\text{اس لئے نہا} \frac{\text{پ ق}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^۲ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right)^۲}$$

یا $\frac{فرس}{فرت} = \sqrt{\left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^2 + \left(\frac{فرما}{فرت}\right)^2}$ ....(۸)

اس لئے $س = \int \sqrt{\left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^2 + \left(\frac{فرما}{فرت}\right)^2}\, فرت$ ....(۹)

اسے دفعہ ۱۱۰ (۱) کی تعمیم خیال کیا جا سکتا ہے۔ وہ ضابطہ اس مفروضہ کی بنا پر حاصل کیا گیا تھا کہ قوس زیر بحث کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی صرف ایک قیمت ہے نتیجہ (۹) اس قید سے آزاد ہے۔ صرف اتنا ضروری ہے کہ جیسے ت بڑھے نقطہ پ منحنی کو مسلسل طور پر مرتسم کرے۔

اسی طرح ضابطہ (۶) کسی قابل تخطیط منحنی کا طول معلوم کرنیکے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ چہ سے وہ زاویہ مراد لیا جائے جو س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا ہوا مماس محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے۔

صریحاً ضابطوں (۸) اور (۹) کی علم حرکت میں تعبیریں مل سکتی ہیں۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے کارٹیزی محددوں لا، ما کو وقت ت کے تفاعل خیال کیا جائے تو $\frac{فرلا}{فرت}$، $\frac{فرما}{فرت}$ محددوں کے محوروں کی سمت میں ترکیبی رفتاریں ہیں اور اگر ع حقیقی رفتار ہو تو

$ع = \sqrt{\left(\frac{فرلا}{فرت}\right)^2 + \left(\frac{فرما}{فرت}\right)^2}$ ....(۱۰)

ضابطے (۸) اور (۹) اس طرح ذیل کے ضابطوں کے معادل ہیں

$\frac{فرس}{فرت} = ع$ ، $س = \int ع\, فرت$ ....(۱۱)

مثال۔ قطع ناقص $لا = ا\, جب\, فہ$ ، $ما = ب\, جم\, فہ$ ....(۱۲)

میں $\left(\frac{فرس}{فرفہ}\right)^2 = \left(\frac{فرلا}{فرفہ}\right)^2 + \left(\frac{فرما}{فرفہ}\right)^2 = ا^2 جم^2 فہ + ب^2 جب^2 فہ$

$= ا^2 (۱ - ز^2 جب^2 فہ)$ جہاں ز خروج المرکز ہے۔

پس اگر قوس کو محور اصغر کے سرے سے ناپا جائے تو قوس

$$س = ا \int_{ب}^{فہ} \sqrt{ا - ز^۲ جب^۲ فہ} \; فرفہ \quad ....(۱۳)$$

یہ تکملہ ریاضی کے معمولی تفاعلوں کی رقوم میں (محدود صورت میں) نہیں بیان ہوسکتا۔ اسے "دوسری قسم کا ناقصی تکملہ" کہا جاتا ہے اسے ہم ن (ز، فہ) [E (e, ϕ)] سے تعبیر کرینگے۔ یہ ایک معلومہ تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے "لیژانڈر"* نے اسکی جدولیں مرتب کی ہیں۔ اس لئے ناقص کا کل محیط اس طرح بیان ہوسکتا ہے

$$۴ ا \int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{ا - ز^۲ جب^۲ فہ} \; فرفہ \quad ....(۱۴)$$

اس جملہ کے تکملہ کو اس طرح ن (ز، $\frac{\pi}{۲}$) بیان کیا جائیگا یا زیادہ اختصار کے طور پر ن۱ (ز) سے۔ یہ دوسری قسم کا "پورا ناقصی تکملہ کہلاتا ہے"† مقدار ز تکملہ کا "مقیاس" کہلاتی ہے۔

سلسلوں کے ذریعہ تکملہ (۱۴) کی قیمت معلوم کرنیکے متعلق دیکھو دفعہ ۱۸۰۔

۱۱۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے قوسیں۔

فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نیم قطر وپ، وپَ ہیں اور پ ن، وپَ پر عمود کھینچا گیا ہے لکھو

وپ = ر، وپَ = ر + مف ر، ∠ پ و پَ = مف طہ

تب دفعہ ۶۳ کے بموجب، پ ن متفاوت ہوگا ر مف طہ سے اور ن پَ متفاوت ہوگا مف ر سے بقدر ایسی مقداروں کے جو بالترتیب پ ن، ن پَ کے مقابلہ میں لاانتہا چھوٹی ہونگی۔ اسلئے پ پَ یا $\sqrt{پ ن^۲ + ن پَ^۲}$

---

* Traite des Fonctions Elliptiques (1826)

† "پہلی قسم" کا ناقصی تکملہ ہے $\int_{ب}^{فہ} \frac{فرفہ}{\sqrt{ا - ز^۲ جب^۲ فہ}}$ اور اسے ہم ق (ز، فہ) [F (e, ϕ)] سے تعبیر کریں گے۔ متناظر "پورا" تکملہ [جسکی اوپر کی حد $\frac{\pi}{۲}$ ہے] ق۱ (ز) سے تعبیر ہوگا۔

انتہا میں $\sqrt{ر^2 (\text{مف طہ})^2 + (\text{مف ر})^2}$ کے ساتھ مساوات کی نسبت رکھیگا
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ متبوع متغیر ہو تو

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}} = \text{نہا} \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف طہ}} = \sqrt{ر^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور اس لئے

$$\text{س} = \int \sqrt{ر^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2}\ \text{فر طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بشرطیکہ تکملہ کو طہ کے مناسب حدود کے اندر لیا جائے۔
اگر ر اور طہ متغیر متبوع ت کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \text{نہا} \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^2 + ر^2 \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

۲۵۴ اس لئے

$$\text{س} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^2 + ر^2 \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^2}\ \text{فر ت} \quad \ldots\ldots (۴)$$

جس میں (۲) بطور خاص صورت کے شامل ہے۔

شکل (۶۴)

اگر ر، طہ کو قوس س کے تفاعل خیال کیا جائے اور فہ سے وہ زاویہ مراد ہو جو منحنی کا مماس جسے س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے، سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے تو

$$\text{جم ن پَ پ} = \frac{\text{ن پَ}}{\text{پ پَ}} \text{ ، جب ن پَ پ} = \frac{\text{پ ن}}{\text{پ پَ}}$$

اس لئے انتہا میں $\text{جم فہ} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ ، $\text{جب فہ} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}}$ ....(۵)

اِن نتائج کی حرکیاتی توضیح ہوسکتی ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع سے تعبیر ہو تو سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس کے علی القوائم رفتاریں بالترتیب ہونگی

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ع جم فہ} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \\ \text{ع جب فہ} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ت}} \end{array}\right. \quad ....(۶)$$

اور ضابطہ (۴) پہلے کی طرح اس کے معادل ہے

$$\text{س} = \int \text{ع فر ت} \quad ....(۷)$$

۱۱۳۔ گردشی سطحوں کے رقبے۔

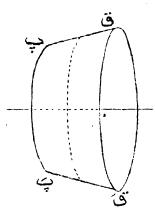
منحنی سطح کے رقبہ کی عام تعریف مرتب کرنا اور پھر یہ ثابت کرنا کہ اس رقبہ کی ایک معین قیمت ہے یہ امور ایک حد تک نفاست طلب ہیں۔ اس جگہ ہم ایسی گردشی سطح کو بحث میں لائینگے جو محور پر علی القوائم مستوی سطحوں سے محدود ہو (محدود ہونا ضروری نہیں)۔

۲۵۵

دائری اسطوانے سے ہم شروع کرتے ہیں۔ اسکی منحنی سطح کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ یہ اندر بنے ہوئے منشور کے طرفی رخوں کے رقبوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے۔ اِن سب رخوں کا ایک ہی طول ہے اور ان کا مجموعہ اس مشترک طول اور منشور کی چلیپی تراش کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہا میں یہ محیط اسطوانہ کا محیط ہوجاتا ہے۔ اس لئے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح جس کا نیم قطر ا اور ارتفاع ف ہو ۲ ‎π‎ ا ف ہے۔

اس کے بعد مخروط کی سطح لو جو محور پر عمود دار دو مستویوں کے درمیان گھری ہوئی ہے۔

اس کے اندر ناقص مخروط مضلع بنایا جا سکتا ہے جس کے قاعدے متشابہ اور متشابہ الوضع منتظم کثیر الاضلاع ہیں جو احاطہ کرنے والے دو دائروں کے اندر بنائے گئے ہیں زیر بحث منحنی سطح اس ناقص مخروط مضلع کے طرفی رقبہ کی انتہا خیال کیجا سکتی ہے

شکل (۶۵)

یہ رقبہ منحرفوں کی ایک تعداد پر مشتمل ہے جن سب کا ارتفاع مشترک ہے یعنی انکے متوازی اضلاع کے درمیان عمودی فاصلہ۔ اس لئے یہ رقبہ اس مشترک ارتفاع اور ان دو کثیر الاضلاعوں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے انتہا میں یہ محیط حائط دائروں کے محیط بن جاتے ہیں اور یہ مشترک ارتفاع دائروں سے گھرے ہوئے مخروط کا مکون خط بن جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں خط مستقیم پ ق کے ایک ایسے محور کے گرد گھومنے سے جو اس کی مستوی میں واقع ہے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ پ ق اور پ اور ق کے مرتسمہ دائروں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اور یہی بات ہے کہ یہ رقبہ پ ق اور اسکے وسطی نقطہ کے مرتسمہ دائرہ کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اسکے بعد وہ سطح لو جو منحنی ما = فا ما (۱) .... (۱)

کی قوس محور لا کے گرد گردش کرنے سے پیدا کرتی ہے۔ اس قوس میں نقطوں کی کوئی تعداد لو اور انکو سیدھے خطوں سے ملا کر ایک کھلا کثیر الاضلاع حاصل کرو منحنی سطح کی یہ تعریف اختیار کر لی جاتی ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے جو رقبے مرتسم ہوتے ہیں ان کے مجموعہ کی یہ انتہائی قیمت ہے جبکہ اضلاع کے طول کو لا انتہا کم کیا جائے۔ اس لئے اگر مکون منحنی کے کسی عنصر مف س کا وتر پ ق ہو اور پ ق کے وسطی نقطہ کا معین ما ہو تو منحنی سطح مجموعہ $\sum 2\pi$ ما $\times$ پ ق کی انتہائی ۲۵۶ قیمت ہوگی۔ انتہا میں پ ق، مف س کے ساتھ نسبت مساوات رکھتا ہے اور ما کو منحنی کا معین خیال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سطح $2\pi \sum$ (ما $\times$ مف س) کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوئی یعنی سطح ہے

$$2\pi \int \text{ما فرس} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جبکہ تکملہ کو س کی مناسب وسعت پر لیا گیا ہے۔

مثال ۱ — کرہ کی صورت میں مکون منحنی کے کسی نقطہ کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \text{ا جم طہ}،\quad \text{ما} = \text{ا جب طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جس سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

پس منطقہ کی سطح جو محور لا پر عمود وار مستویوں سے گھرا ہوا ہو یہ ہوگی

$$2\pi\,\text{ا}^2 \int_{\text{طہ}_1}^{\text{طہ}_2} \text{جب طہ فرطہ} = 2\pi\,\text{ا}^2 (\text{جم طہ}_1 - \text{جم طہ}_2) = 2\pi\,\text{ا}\,(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) \quad \ldots (۵)$$

جہاں لا_1، لا_2 احاطہ کرنیوالے دائروں سے متعلق ہیں۔ اس لئے کرہ کا منطقہ رقبہ میں اس حائط اسطوانہ کے متناظر منطقہ کے مساوی ہے جس کا محور احاطہ کرنے والے دائروں کے مستویوں پر عمود وار ہے۔ خاص صورت میں کرہ کی کل سطح $= 2\pi\,\text{ا} \times 2\,\text{ا} = 4\pi\,\text{ا}^2$

مثال ۲ — ایک دائرہ کا نیم قطر ب ہے۔ اس کی سطح میں ایک خط مستقیم ہے جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ا ہے۔ دائرہ کو اس خط کے گرد پھرانے سے جو چھلہ حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

یہاں

$$\text{لا} = \text{ب جب طہ}،\quad \text{ما} = \text{ا} - \text{ب جم طہ}،\quad \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \text{ب} \quad \ldots (۶)$$

پس $۲\pi \int \text{ما فرس} = ۲\pi\,\text{ب} \int (\text{ا} - \text{ب جم طہ})\,\text{فرطہ}$ .....(۷)

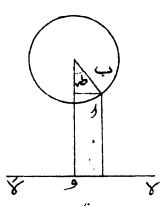
شکل (۶۶)

طہ کے حدود ہیں . اور ۲π اور سطح حاصل ہوتی ہے $۲\pi\,\text{ب} \times ۲\pi\,\text{ا}$ جو ب قطر کے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا طول (۲π ا) ہو اور یہ طول اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہے جو مکون دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۲۵۷

مثال ۳ ۔ ناقص لا = ا جب فہ، ما = ب جم فہ کو محور اعظم کے گرد پھرانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

$$۲\pi \int \text{ما فرس} = ۲\pi \int \text{ما} \frac{\text{فرس}}{\text{زفہ}}\,\text{زفہ}$$

$$= ۲\pi\,\text{ا ب} \int \sqrt{۱ - \text{ز}^۲ \text{جب}^۲ \text{فہ}}\;\text{فر(جب فہ)} \quad .....(۹)$$

دفعہ ۱۱۱ کی رو سے ۔ اب رکھو ز جب فہ = جب طہ ....(۱۰)

پس تکملہ (۹) $= \frac{۲\pi\,\text{ا ب}}{\text{ز}} \int \text{جم}^۲ \text{طہ فرطہ} = \frac{\pi\,\text{ا ب}}{\text{ز}} (\text{طہ} + \text{جب طہ جم طہ})$

..........(۱۱)

کل سطح دریافت کرنیکے لئے اسے فہ = $\mp \frac{\pi}{۲}$ کے درمیان یا

ط = ∓ جب⁻¹ ز کے درمیان لیا جائے۔ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{2\pi a b}{z}\left\{ جب^{-1} ز + ز\sqrt{1-z^2} \right\}$$

یا $2\pi b^2 + 2\pi a b \frac{جب^{-1} ز}{z}$ .... (۱۲)

اسی طریقہ سے محور اصغر کے گرد ناقص کی گردش سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی سطح ہے $\frac{2\pi a b}{z}\left\{ جبز^{-1} ز + ز\sqrt{1+z^2} \right\}$ جہاں $z = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

یا $2\pi a^2 + 2\pi a b \frac{جبز^{-1} ز}{z}$ .... (۱۳)

اسے اس صورت میں بھی رکھا جا سکتا ہے

$2\pi a^2 + \pi b^2 \times \frac{1}{z}$ لوک $\frac{1+z}{1-z}$ .... (۱۴)

۱۱۴۔ **تقریبی تکمیل۔** ایک محدود تکملہ کی تقریبی قیمت دریافت کرنیکے کئی طریقے ایجاد کئے گئے ہیں جبکہ اس میں کے تفاعل کا نا محدود تکملہ نہ حاصل ہو سکے۔ اختصار بیان کی خاطر اس مسئلہ کی صرف ہندسی شکل پر غور کیا جائیگا یعنی اس رقبہ کی صرف تقریبی قیمت مطلوب ہے جو ایک دئے ہوئے منحنی، محور لا اور دو معلومہ معینوں کے درمیان واقع ہے۔

۲۵۸ جن طریقوں کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے ان سب میں دئے ہوئے حقیقی منحنی کی بجائے ایک اور منحنی رکھدینا مقصود ہوتا ہے جو قریب قریب وہی راستہ رکھتا ہو جو اصلی منحنی کا ہے لیکن یہ آسانی سے تکمل ہونے والے تفاعل سے تعبیر ہو سکے۔ سب سے آسان اور ناتراشیدہ طریقہ وہ ہے جس میں مساوی فاصلوں پر منحنی کے ن معین کھینچے جاتے ہیں اور ان کے سروں کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جاتا ہے اس طرح منحرفوں کے ایک سلسلہ کا رقبہ مطلوبہ رقبہ کی جگہ اختیار کرلیتا ہے۔ اگر متصل معینوں کے درمیان فاصلہ ھ ہو اور معینوں کے طول $ع_۰, ع_۱ \ldots ع_ن$

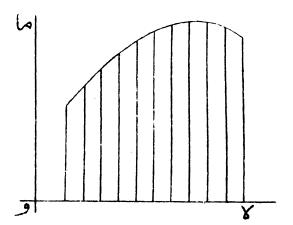
ہوں تو منحرفوں کا مجموعہ ہے

$$\tfrac{1}{2}(\text{ما}_1+\text{ما}_2)\text{ھ}+\tfrac{1}{2}(\text{ما}_2+\text{ما}_3)\text{ھ}+\ldots+\tfrac{1}{2}(\text{ما}_{\text{ن}-2}+\text{ما}_{\text{ن}-1})\text{ھ}+\tfrac{1}{2}(\text{ما}_{\text{ن}-1}+\text{ما}_{\text{ن}})\text{ھ}$$

$$=\text{ھ}\left\{\tfrac{1}{2}\text{ما}_1+\text{ما}_2+\text{ما}_3+\ldots+\text{ما}_{\text{ن}-2}+\text{ما}_{\text{ن}-1}+\tfrac{1}{2}\text{ما}_{\text{ن}}\right\}\ldots\ldots\ldots(1)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کے اوسط حسابی میں درمیانی معینوں کا مجموعہ جمع کرو اور نتیجہ کو مشترک وقفہ سے ضرب دو۔

اس طرح سے جو قیمت حاصل ہوگی وہ صریحاً اصلی رقبہ سے زیادہ ہوگی اگر منحنی محور لا کی جانب محدب ہو اور کم ہوگی اگر مقعر ہو۔

شکل (۶۷)

ایک اور طریقہ جو ابتدا میں نیوٹن اور کوٹس* نے دیا وہ یہ ہے کہ ما کے لئے (ن-۱) ویں درجہ کا منطق تکملی جملہ اختیار کیا جائے یعنی

---

* دیکھو کوٹس کا رسالہ De Methodo Differentiali جو Harmonia Mensurarum, Camb. 1722 کے ضمیمہ کے طور پر چھپا۔

$$ط = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots + ا_{ن-۱} لا^{ن-۱} \ldots\ldots (۲)$$

۲۵۹

اور پھر سروں $ا_۰، ا_۱، ا_۲ \ldots\ldots ا_{ن-۱}$ کے لئے قیمتیں دریافت کی جائیں کہ لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے لئے ط کی معلومہ اور معینہ قیمتیں $ط_۱، ط_۲ \ldots ط_ن$ ہوں۔ تب رقبہ حاصل ہوتا ہے

$$\int ط\, فرلا = ا_۰ لا + \frac{۱}{۲} ا_۱ لا^۲ + \frac{۱}{۳} ا_۲ لا^۳ + \ldots + \frac{۱}{ن} ا_{ن-۱} لا^ن \ldots (۳)$$

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔

مثلاً تین متساوی الفصل معینوں کی صورت میں مبدأ کو وسطی معین کے پایہ پر لو۔ ہم تسلیم کرتے ہیں

$$ط = ا_۰ + ا_۱ \frac{لا}{ھ} + ا_۲ \left(\frac{لا}{ھ}\right)^۲ \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ترتیب وار ذیل کی شرائط کے تابع

$$\left.\begin{array}{llll} ط = & ط_۱ & ط_۲ & ط_۳ \\ لا = & -ھ & ۰ & ھ \end{array}\right] \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اِن سے حاصل ہوتا ہے

$$ا_۰ - ا_۱ + ا_۲ = ط_۱،\ ا_۰ = ط_۲،\ ا_۰ + ا_۱ + ا_۲ = ط_۳ \ldots\ldots (۶)$$

پس $ا_۰ = ط_۲،\ ا_۱ = \frac{۱}{۲}(ط_۳ - ط_۱)،\ ا_۲ = \frac{۱}{۲}(ط_۱ + ط_۳ - ۲ط_۲) \ldots\ldots (۷)$

اس لئے $\int_{-ھ}^{ھ} ط\, فرلا = ۲(ا_۰ + \frac{۱}{۳} ا_۲) ھ = \frac{۱}{۳}(ط_۱ + ۴ط_۲ + ط_۳) ھ \ldots (۸)$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۹ کے ساتھ۔

اوپر کا طریقہ اس کے مرادف ہے کہ حقیقی منحنی کی بجائے مکافی کی قوس رکھدی جائے جس کا محور انتصابی ہے۔ اور نتیجہ (۸) منحرف $\frac{۱}{۲}(ط_۱ + ط_۳)$ ۲ھ اور مکافی قطعہ

$\frac{۲}{۳}\left\{\frac{۱}{۲}(ما_۱+ما_۳)-ما_۲\right\}۲$ ھ سے فرق کو تعبیر کرتا ہے۔

دیکھو دفعہ ۰۰ ۱ مثال ۳۔

چار متساوی الفصل معینوں کی صورت میں اسی طرح کے عمل سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳}{۸}(ما_۱+۳ما_۲+۳ما_۳+ما_۴)\text{ ھ} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

اور پانچ معینوں کی صورت میں ملتا ہے

$$\frac{۲}{۴۵}(۷ما_۱+۳۲ما_۲+۱۲ما_۳+۳۲ما_۴+۷ما_۵)\text{ ھ} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

معینوں کی تعداد کے بڑھنے سے اس طریقہ میں سر زیادہ بے ڈول* ہوتے ہیں۔ سیمسن نے تقریبی رقبہ دریافت کرنیکا ایک سادہ طریقہ ایجاد کیا† مگر اس میں عام طور پر اتنی صحت نہیں ہوتی۔ وقفہ کو معینوں کی طاق تعداد میں تقسیم کرو۔ پہلے معین سے شروع کر کے متبادل معینوں کے درمیان کا رقبہ مکافی ضابطہ (۸) کے ذریعہ محسوب کرو اور ان نتائج کو جمع کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳}\{ما_۱+۴ما_۲+ما_۳$$
$$+ما_۳+۴ما_۴+ما_۵$$
$$+ما_۵+۴ما_۶+ما_۷$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+ما_{۲ن-۱}+۴ما_{۲ن}+ما_{۲ن+۱}\}\text{ ھ}$$

$$=\frac{۱}{۳}\{(ما_۱+ما_{۲ن+۱})+۲(ما_۳+ما_۵+\ldots+ما_{۲ن-۱})+۴(ما_۲+ما_۴+\ldots+ما_{۲ن})\}\text{ ھ} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کا مجموعہ، درمیانی طاق معینوں کے مجموعہ کا دو چند اور جفت معینوں کے مجموعہ کا چہار چند لیکر ان سب کو جمع کرو اس کل مجموعہ کے ایک تہائی کو مشترک وقفہ ھ کے ساتھ ضرب دو۔

---

* صورتوں ن = ۲، ۳، ۴، ۵، ... ۱۱ کے لئے کوٹس نے سر دریافت کئے۔ نیز دیکھو Bertrand, Calcul Integral دفعہ ۳۶۳۔

† Mathematical Dissertations (1743)

مثال۔ ضابطہ $\frac{۱}{۴}\pi = \int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{۱+لا^{۲}}$ ....(۱۲)

سے π کی قیمت محسوب کرو۔

تکمل کی وسعت کو دس مساوی وقفوں میں تقسیم کرو، یعنی ھ = ۰٫۱ تو

$فا_{۱}$ = ۱، $فا_{۲}$ = ۰٫۹۹۰۰۹۹، $فا_{۳}$ = ۰٫۹۶۱۵۳۸۵

$فا_{۴}$ = ۰٫۹۱۷۴۳۱۲، $فا_{۵}$ = ۰٫۸۶۲۰۶۹۰

$فا_{۶}$ = ۰٫۸۰۰۰۰۰۰، $فا_{۷}$ = ۰٫۷۳۵۲۹۴۱

$فا_{۸}$ = ۰٫۶۷۱۱۴۰۹، $فا_{۹}$ = ۰٫۶۰۹۷۵۶۱

$فا_{۱۱}$ = ۰٫۵، $فا_{۱۰}$ = ۰٫۵۵۲۴۸۶۲

اس لئے $فا_{۱} + فا_{۱۱}$ = ۱٫۵، $فا_{۳} + فا_{۵} + فا_{۷} + فا_{۹}$ = ۳٫۱۶۸۶۵۷۷

$فا_{۲} + فا_{۴} + فا_{۶} + فا_{۸} + فا_{۱۰}$ = ۳٫۹۳۱۱۵۷۳

ضابطہ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{۱}{۴}\pi = \frac{۱}{۳۰}$ (۱٫۵ + ۶٫۳۳۷۳۱۵۴ + ۱۵٫۷۲۴۶۲۹۲)

= ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۵

صرف سات ہندسے رکھنے سے π = ۳٫۱۴۱۵۹۳

یہ نتیجہ آخری ہندسہ تک درست ہے۔

ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا $\frac{\pi}{۴}$ = ۰٫۷۸۴۹۸۱۵

یعنی π = ۳٫۱۳۹۹۲۶ جو تقریباً ۰۰۰۲ میں بقدر ایک حصہ کے چھوٹا ہے

۱۱۵ – اوسط قیمتیں – فرض کرو کہ سعت (ب – ا) کے اندر لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے جواب میں ایک تفاعل فا (لا) کی قیمتیں $فا_{۱}$، $فا_{۲}$ ...... $فا_{ن}$ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ تفاعل کی یہ قیمتیں لا کی ان قیمتوں کے جواب میں ہیں جو ن مساوی وقفوں (ھ) کے وسطی نقاط کو تعبیر کرتے ہیں جن میں سعت تقسیم کی گئی ہے۔ جس انتہائی قیمت کی طرف یہ اوسط حسابی

۲۶۱

$$\frac{1}{ن}\left(ق_۱ + ق_۲ + \ldots\ldots + ق_ن \right) \ldots\ldots\ldots (۱)$$

مائل ہوتی ہے جبکہ ن لاانتہا بڑھتا ہے اس کو تفاعل کی "اوسط قیمت" کہتے ہیں سعت (ب - ا) پر۔

چونکہ $ھ = \frac{ب - ا}{ن}$، جملہ (۱) اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{ق_۱ ھ + ق_۲ ھ + \ldots\ldots + ق_ن ھ}{ب - ا}$$

اور اسکی انتہائی قیمت جبکہ ن ← ∞، ھ ← ۰ یہ ہے

$$\frac{\int_ا^ب فہ(لا)\, فرلا}{ب - ا} \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہندسی تعبیر کے موافق اوسط قیمت اس مستطیل کا ارتفاع ہے جس کا قاعدہ ب - ا ہے اور جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہے جو منحنی ق = فہ (لا)، اطراف کے معینوں اور محور لا سے گھرا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۴۹ دفعہ ۹۱۔

دفعہ ۹۱ (۳) کا مسئلہ اب یوں بیان ہوسکتا ہے۔ متغیر متبوع کی کسی وسعت پر ایک مسلسل تفاعل کی اوسط قیمت، اسی سعت کے اندر متغیر متبوع کی ایک ایک قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۱۴ کے مختلف ضابطوں کی اب یہ تعبیر ہوسکتی ہے کہ ان سے ایک معلومہ سعت میں تفاعل کی اوسط قیمت کے لئے تقریبی جملے تفاعل کی ایسی قیمتوں کے سلسلہ کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں جو سعت بھر میں متساوی الفصل وقفوں پر لیگئی ہیں۔ مثلاً تین یا چار ایسی قیمتوں کی رقوم میں اوسط قیمتیں کوٹس کے طریقہ سے بالترتیب یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\frac{1}{6}\left(ق_۱ + ۴ ق_۲ + ق_۳ \right)، \quad \frac{1}{8}\left(ق_۱ + ۳ ق_۲ + ۳ ق_۳ + ق_۴ \right)$$

اوسط قیمت کے تخیل کو استعمال میں لانے سے پہلے یہ صاف طور پر معلوم ہونا ضروری ہے کہ متغیر متبوع کونسا ہے جسکو (ابتدا میں) مساوی اضافے دئے گئے ہیں مثلاً اگر ایک ذرہ مستقل اسراع ج کے ساتھ نیچے گر رہا ہو تو رفتار کی اوسط قیمت سکون سے وقت کے کسی وقفہ ت، میں یہ ہے

$$\frac{1}{ت_1}\int_0^{ت_1} ع\ فرت = \frac{1}{ت_1}\int_0^{ت_1} ج ت\ فرت = \frac{1}{2} ج ت_1$$

یعنی یہ آخری رفتار کا آدھا ہے۔ لیکن اگر اوسط رفتار فضا (س) کے مساوی چھوٹے اضافوں کے لئے مطلوب ہو تو چونکہ $ع^2 = 2 ج س$

$$\frac{1}{س_1}\int_0^{س_1} ع\ فرس = \frac{(2ج)^{\frac{1}{2}}}{س_1}\int_0^{س_1} س^{\frac{1}{2}}\ فرس = \frac{2}{3}(2ج س_1)^{\frac{1}{2}}$$

یہ آخری رفتار کا دو تہائی ہے۔

مثال ۱۔ جب طہ کی اوسط قیمت، ۰ سے π تک طہ کے مساوی الفصل وقفوں کے لئے ہے

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} جب\ طہ\ فرطہ = \frac{2}{\pi} = ۶۳۶۶، \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے نصف قطر ا کے نصف دائرہ کے معینوں کی اوسط قیمت، جبکہ انہیں قوس کے متساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچا جائے ۶۳۶۶، ا ہے۔

اگر قطر پر کے متساوی الفصل نقطوں میں سے معین کھینچے جاتے تو اوسط قیمت ہوتی

$$\frac{1}{2ا}\int_{-ا}^{ا} (ا^2 - لا^2)^{\frac{1}{2}}\ فرلا = \frac{1}{2} ا \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جم^2 طہ\ فرطہ = \frac{1}{4}\pi ا \ldots (۴)$$

یا ۷۸۵۴، ا۔ یہ بآسانی از خود دیکھا جا سکتا ہے کہ اس آخری اوسط کو کیوں بڑا ہونا چاہئے۔

مثال ۲۔ ایک ٹکیا کی شکل گردش کے مکافی نما کی ہے جو بہت چپٹا ہے۔ اس کی اوسط موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ دریافت کرو۔

اگر ا نصف قطر ہو تو مرکز سے فاصلہ ر پر موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ

$$\text{ہے}\quad \sqrt{1-\frac{ر^2}{ا^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

اس لئے مطلوبہ نسبت ہے

$$\frac{1}{\pi ا^2}\int_0^{ا} \sqrt{1-\frac{ر^2}{ا^2}}\ 2\pi ر\,فر = \frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots (6)$$

مثال ۳ ۔ اگر کرہ کی کثافت ث مرکز سے فاصلہ ر کا تفاعل ہو تو حجم کا جزو

$$مف\,ح = مف\left(\frac{4}{3}\pi ر^3\right) = 4\pi ر^2 مف\, ر$$

۲۶۳ اوسط کثافت ہے $\bar{ث} = 4\pi \int_0^{ا} ث\, ر^2 فر \div \frac{4}{3}\pi ا^3$

$$= \frac{3}{ا^3}\int_0^{ا} ث\, ر^2 فر\ \cdots\cdots\cdots (7)$$

اگر ا بیرونی نصف قطر ہو۔

مثلاً اگر ث ∝ $ر^ن$ تو اوسط کثافت سطح پر کی کثافت کا $\frac{3}{ن+3}$ ہے۔

نیز یہ تسلیم کرنے سے کہ زمین کے اندر

$$ث = ث_\cdot \left(1 - ک\frac{ر^2}{ا^2}\right)\ \cdots\cdots\cdots (8)$$

حاصل ہوتا ہے

$$\bar{ث} = ث_\cdot\left(1-\frac{3}{5}ک\right) = \frac{1}{5}\left(2ث_\cdot + 3ث_1\right)\cdots\cdots (9)$$

جہاں $ث_1$ سطح پر (ر = ا) کی کثافت ہے۔ اگر کثافت کا اوپر کا قانون زمین کی صورت میں لگ سکے، تب چونکہ $\bar{ث} = 2ث_1$ (تقریباً) ہمیں حاصل ہوتا ہے $ث_\cdot = \frac{7}{2}ث_1$ یا مرکز پر کی کثافت سطح پر کی کثافت کا $3\frac{1}{2}$ گنا ہے۔

۱۱۶ ۔ **ہندسی اشکال کے اوسط مرکز۔** ہندسی نقاط

$$(لا_1، ہا_1)، (لا_2، ہا_2)، (لا_3، ہا_3) \cdots\cdots (لا_ن، ہا_ن) \cdots (1)$$

کے نظام کے اوسط مرکز (ط) کی یہ تعریف ہو سکتی ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس کے محدد ہیں

$$\left.\begin{aligned} \bar{لا} &= \frac{1}{ن}(لا_1 + لا_2 + \cdots\cdots + لا_ن) = \frac{\sum(لا)}{ن} \\ \bar{ما} &= \frac{1}{ن}(ما_1 + ما_2 + \cdots\cdots + ما_ن) = \frac{\sum(ما)}{ن} \end{aligned}\right\} \quad (۲)$$

چونکہ یہ ارتباط خطی ہیں اور کارٹیزی محددوں کے استحالے خطی ضابطوں سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس لئے یہ بآسانی معلوم ہوتا ہے کہ کسی خط سے ط کا فاصلہ اسی خط سے دئے ہوئے نقطوں کے فاصلوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہے۔ البتہ ان فاصلوں کو مناسب علامتوں کے ساتھ لیا جائے بموجب اس کے کہ یہ خط کے ایک جانب واقع ہوں یا دوسری جانب۔

اسی طریقہ سے، ایک مستوی منحنی کا یا مستوی رقبہ کا ایک اوسط مرکز ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس مستوی میں کے کسی خط سے منحنی یا رقبہ کے صغاری اجزاء کے فاصلوں کے اوسط (دفعہ ۱۱۵ کے معنے میں) کے مساوی ہوتا ہے۔

پس منحنی کے لئے

$$\bar{لا} = نہا \frac{\sum لا\, مف\, س}{\sum مف\, س}، \quad \bar{ما} = نہا \frac{\sum ما\, مف\, س}{\sum مف\, س} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور رقبہ کی صورت میں

$$\bar{لا} = نہا \frac{\sum لا\, مف\, ق}{\sum مف\, ق}، \quad \bar{ما} = نہا \frac{\sum ما\, مف\, ق}{\sum مف\, ق} \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں مف ق رقبہ کا جز یا عنصر ہے۔ انتہا میں یہ مجموعے تکملوں کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

مثال ۱۔ دائری قوس کی صورت میں، اگر مبدا کو مرکز، محور لا کو وسطی خط پر لیا جائے تو $\bar{ما} = .$ ازروے تشاکل۔ لکھو لا = ا جم طھ، مف س = ا مف طھ، اس طرح

$$\bar{لا} = \frac{1}{۲\,ا\,عھ} \int_{-عھ}^{عھ} ا\, جم\, طھ\, ا\, مف\, طھ = ا\, \frac{جب\, عھ}{عھ} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اگر ۲ عھ وہ زاویہ ہو جو کل قوس کے سامنے مرکز پر بنتا ہے۔

۲۶۴

جیسے عہ بڑھتا ہے لامتناہی چھوٹی قیمت سے ۱۱ تک لا گھٹتا ہے ا سے صفر تک۔

نصف دائرہ کے لئے عہ = $\frac{\pi}{2}$ اور لا = $\frac{2}{\pi}$ ا = ۰٫۶۳۷ ا

مثال ۲۔ مکافی مآ^۲ = ۴ ا لا .... (۶)

کے قطعہ کے رقبہ کے لئے جو دوہرے معیّن لا = ف سے گھرا ہوا ہو

$$\bar{لا} = \frac{\int_0^{ف} لا\ ما\ فرلا}{\int_0^{ف} ما\ فرلا} = \frac{\int_0^{ف} لا^{\frac{3}{2}}\ فرلا}{\int_0^{ف} لا^{\frac{1}{2}}\ فرلا} = \frac{3}{5}\ ف \quad \text{...... (۷)}$$

اوسط مرکز کے تخیل کی صریحاً تین ابعادی شکلوں کی صورت میں بھی توسیع کی جا سکتی ہے، لیکن یہاں خط سے فاصلوں کی بجائے سطح مستوی سے فاصلے لئے جانے چاہئیں۔ مثلاً سطح منحنی کی صورت میں

$$\bar{لا} = نہا \frac{\Sigma\ لا\ مف\ س}{\Sigma\ مف\ س}،\quad \bar{ما} = نہا \frac{\Sigma\ ما\ مف\ س}{\Sigma\ مف\ س}،\quad \bar{ی} = نہا \frac{\Sigma\ ی\ مف\ س}{\Sigma\ مف\ س}$$

.... (۸)

جہاں مف س سطح کا جزو ہے۔ اسی طرح حجم کے لئے

$$\bar{لا} = نہا \frac{\Sigma\ لا\ مف\ ح}{\Sigma\ مف\ ح}،\quad \bar{ما} = نہا \frac{\Sigma\ ما\ مف\ ح}{\Sigma\ مف\ ح}،\quad \bar{ی} = نہا \frac{\Sigma\ ی\ مف\ ح}{\Sigma\ مف\ ح}$$

(۹) ....

جہاں مف ح حجم کا جزو ہے۔

گردشی سطح یا مجسم کی صورت میں اوسط مرکز تشاکل کے محور پر ہوتا ہے، اگر اس کو محور لا مانا جائے تو صرف لا کی قیمت محسوب کرنا باقی رہ جاتا ہے۔ اگر ملون منحنی کا معین ما ہو تو (۸) میں رکھو مف س = ۲ π ما مف س یہ سطح کے حلقہ نما جزو کا رقبہ ہوگا جس کے سب نقطے مستوی لا = ۰ سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ اس لئے

$$\bar{لا} = \frac{\int لا \times ۲\pi\, ما\, فرس}{\int ۲\pi\, ما\, فرس} = \frac{\int لا\, ما\, فرس}{\int ما\, فرس} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اسی طرح (۹) میں رکھو مف ح = π ما^۲ مف لا تو حاصل ہوگا

$$\bar{لا} = \frac{\int لا \times \pi\, ما^۲\, فرلا}{\int \pi\, ما^۲\, فرلا} = \frac{\int لا\, ما^۲\, فرلا}{\int ما^۲\, فرلا} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

مثال ۳ ۔ کروی سطح کے منطقہ کے لئے رکھو

$$لا = ا\, جم\, طہ،\ ما = ا\, جب\, طہ،\ مف\, س = ا\, مف\, طہ \quad \ldots (۱۲)$$

$$\text{تو}\ \bar{لا} = ا\, \frac{\int_{عہ}^{بہ} جم\, طہ\, جب\, طہ\, فرطہ}{\int_{عہ}^{بہ} جب\, طہ\, فرطہ} = \frac{۱}{۲}\, ا\, \frac{جم^۲ عہ - جم^۲ بہ}{جم\, عہ - جم\, بہ}$$

$$= \frac{۱}{۲}\, ا\, (جم\, عہ + جم\, بہ) = \frac{۱}{۲}\, (لا_۱ + لا_۲) \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

اگر عہ، بہ زاویہ طہ کے حدود ہوں اور لا۱، لا۲ حائط دائروں کے فصلے ہوں لہٰذا اس لئے منطقہ کا اوسط مرکز محور پر حائط دائروں کے مستویوں کے عین وسط میں واقع ہوتا ہے مثلاً نیم کروی سطح کا اوسط مرکز محوری نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

یہ نتائج کرہ اور لفافی اسطوانہ کے متناظر منطقوں کے رقبوں کے مساوی ہونے سے حاصل ہو سکتے تھے (دفعہ ۱۱۳ مثال ۱)۔

مثال ۴ ۔ مجسم مستدیر مخروط کی صورت میں جبکہ مبدأ راس پر ہو تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا^۲، پس

$$\bar{لا} = \frac{\int_{۰}^{ف} لا^۳\, فرلا}{\int_{۰}^{ف} لا^۲\, فرلا} = \frac{۳}{۴}\, ف \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اگر ف ارتفاع ہو۔

مثال ۵ ۔ ناقصی مکافی نما

$$۲\,لا = \frac{ما^2}{پ} + \frac{ی^2}{ق} \qquad (۱۵)$$

کے قطعہ کے لئے جو لا = ف سے کٹتا ہے چونکہ تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا،
اس لئے جیساکہ دفعہ ۸۰۔ ا مثال ا میں

$$\bar{لا} = \frac{\int_0^{ف} لا^2\, فرلا}{\int_0^{ف} لا\, فرلا} = \frac{۲}{۳}\, ف \qquad (۱٦)$$

۲٦٦ مثال ٦ ۔ نصف قطر ا کے نصف کرہ کے لئے رکھو $ما^2 = ا^2 - لا^2$ اسطرح

$$\bar{لا} = \frac{\int_0^{ا} لا\,(ا^2 - لا^2)\, فرلا}{\int_0^{ا} (ا^2 - لا^2)\, فرلا} = \frac{۳}{۸}\, ا \qquad (۱۷)$$

اسی ضابطہ سے ناقص نما

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱ \qquad (۱۸)$$

کے اس نصف کے اوسط مرکز کا مقام معلوم ہوتا ہے جو مستوی ما ی کے دائیں جانب واقع ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا) ایسے بدلتا ہے جیسے $ا^2 - لا^2$۔ دیکھو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ ۔

۱۱۷ ۔ پیپس (Pappus.) کے مسئلے ۔

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد گھومے مگر اسکو کاٹے نہیں تو سطح جو اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ قوس کے طول اور اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ محور لا گھماؤ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اور کسی منحنی کا معین ما ہے۔ دفعہ ۱۱۳ کی رو سے پوری گردش میں جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ $۲\pi \int ما\, فرس$ کے مساوی ہے جہاں تکملہ کل قوس پر لیا جائے ۔

اگر قوس کا اوسط مرکز $\bar{\text{ما}}$ ہو تو $\bar{\text{ما}} = \frac{\int \text{ما فرس}}{\int \text{فرس}}$ دفعہ ١١٦ کی رو سے۔

اس لئے $2\pi \int \text{ما فرس} = 2\pi\, \bar{\text{ما}} \times \int \text{فرس} \ldots\ldots (1)$

جو مسئلہ مذکورہ ہے۔

(٢) اگر ایک مستوی رقبہ کو اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد پھرایا جائے جو اسے کاٹے نہیں تو حجم جو اس طرح پیدا ہوتا ہے وہ رقبہ اور اسکے اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ مف ق رقبہ کا عنصر ہے۔ پوری گردش میں جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے

$$\text{نہا} \sum (2\pi\, \text{ما} \times \text{مف ق})$$

اگر رقبہ کی کمیت کا مرکز $\bar{\text{ما}}$ ہو تو

$$\bar{\text{ما}} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ما مف ق}}{\sum \text{مف ق}}$$ ، دفعہ ١١٦ کی رو سے

اسلئے $\text{نہا} \sum (2\pi\, \text{ما} \times \text{مف ق}) = 2\pi\, \bar{\text{ما}} \times \text{نہا} \sum \text{مف ق} \ldots (2)$ ٢٧٧

جو مسئلہ مطلوبہ ہے*۔

گردشوں کو پورا خیال کیا گیا ہے لیکن صریحاً یہ قید ضروری نہیں۔

ان مسائل کے عکس مستوی قوس، مستوی رقبہ کے اوسط مرکز دریافت کرنیکے لئے استعمال ہو سکتے ہیں جبکہ ان کی گردش سے پیدا شدہ سطح اور حجم بلاواسطہ طریقہ پر معلوم ہوں۔ دیکھو مثال ٣ آگے۔

---

* یہ مسائل پیپس کے رسالہ علم حیل میں موجود ہیں۔ پیپس ۳۰۰ء میں مشہور ریاضی داں تھا۔ نئے سرے سے گلڈن (Guildinus) ان مسائل کو بیان کیا۔ دیکھو

(De centro gravitatis)(1635—1642).

(Ball, History of Mathematics)

مثال ۱۔ دائرہ نصف قطر ب، اپنی سطح میں کے ایک خط کے گرد گھوم کر چھلا پیدا کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا فاصلہ خط سے ا ہے۔ سطح اور حجم دریافت کرو۔

سطح ہے ۲ π ب × ۲ π ا = ۴ π^2 ا ب

حجم ہے π $ب^2$ × ۲ π ا = ۲ π^2 ا $ب^2$۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ مثال ۳ اور دفعہ ۱۱۳ مثال ۲ کے ساتھ۔

مثال ۲۔ مکافی $ما^2$ = ۴ ا لا کا قطعہ جو دوہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہے اس معین کے گرد گھومتا ہے۔

اگر دوہرے معین کا طول ۲ ک ہو تو قطعہ کا رقبہ $\frac{۴}{۳}$ ف ک ہے (دفعہ ۱۰۰) اور اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ معین سے $\frac{۲}{۵}$ ف ہے (دفعہ ۱۱۶ مثال ۲) اس لئے حجم جو پوری گردش سے پیدا ہوتا ہے یہ ہے

$$\frac{۴}{۳} \text{ ف ک} \times \frac{۴}{۵} \pi \text{ ف} = \frac{۱۶}{۱۵} \pi \text{ ف}^2 \text{ک}$$

مثال ۳۔ نیم دائری قوس جو اس کے سروں کے ملانیوالے قطر کے گرد گھومتی ہے اسکے لئے

π ا × ۲ π ما = ۴ π $ا^2$، جس سے ما = $\frac{۲}{\pi}$ ا

نیم دائری رقبہ جو اپنے احاطہ کرنے والے قطر کے گرد گھومتا ہے اسکی صورت میں

$\frac{۱}{۲}$ π $ا^2$ × ۲ π ما = $\frac{۴}{۳}$ π $ا^3$ یعنی ما = $\frac{۴}{۳}$ $\frac{ا}{\pi}$

اسی طرح کے حساب سے (کسی عمودی تراش کے) منشور یا اسطوانہ کے حجم کے لئے جو مستوی سطح سے گھرا ہوا ہو سادہ ضابطہ مل سکتا ہے۔

پہلے ہم یہ فرض کرینگے کہ ایک سرا جسے قاعدہ کہا جائیگا طول پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ قاعدہ کا کوئی نقطہ پ ہے اور فرض کرو کہ معین پ پ' کا طول ی ہے جہاں پ پ' طول کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مقابل کے سرے سے پ' پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مائل سرے کے مرکز کا معین ی ہے۔

اگر پ اور پ' پر رقبہ کے متناظر اجزا مف ق اور مف ق' ہوں تو

$$\bar{ی} = \text{نہا} \frac{\sum ی \,\text{مف}\, \bar{ق}}{\sum \text{مف}\, \bar{ق}} = \text{نہا} \frac{\sum ی \,\text{مف}\, ق}{\sum \text{مف}\, ق}$$

کیونکہ مف ق، مف قَ کا قائم ظل ہے، اس لئے انکی باہمی نسبت مستقل ہے۔

اسلئے مجسم کا حجم = $\sum$ (ی × مف ق) = یَ $\sum$ مف ق ... (۳)

یعنی حجم، قاعدہ کے رقبہ اور مقابل کے رقبے کے اوسط مرکز کے معین کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

جس منشور یا اسطوانہ کے دونوں سرے مائل ہوں اس کو دو ایسے منشوروں یا اسطوانوں کا مجموعہ یا فرق تصور کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک سرا طول کے علی القوائم ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام صورتوں میں حجم، جلیبی تراش اور دو سروں کے اوسط مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ فانہ کی شکل کے مجسم کا حجم جو ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے قاعدہ کے مرکز میں سے گذرنے والے مستوی سے کاٹا جائے اور قاعدہ کی سطح کے ساتھ زاویہ عہ بنائے یہ ہے

$$\frac{1}{2} \pi ا^2 \times \frac{4}{3\pi} ا \,\text{مس}\, عہ = \frac{2}{3} ا^3 \,\text{مس}\, عہ$$ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۸ (مثال ا کے ساتھ)

پیپس کے مسئلوں کی کئی طرح سے تعمیم ہو سکتی ہے لیکن دوسرے مسئلہ کی حسب ذیل توسیع کا یہاں کر دینا کافی ہوگا۔

اگر کوئی مستوی رقبہ، جو مستقل ہو یا مسلسل طور پر بدلنے والا، فضا میں کسی طور پر حرکت کرے لیکن اس طرح کہ مستوی کے متصل محل ایک دوسرے کو رقبہ کے اندر نہ قطع کریں تو حجم تکوین شدہ مساوی ہے

$$\int س \; فرشہ \qquad .... (۴)$$

کے جہاں س رقبہ ہے اور فرشہ ظل ہے مستوی پر کے عماد پر، رقبہ کے اوسط مرکز کے طریق (لوکس) کے چھوٹے جزو کا۔ اگر اس طریق کا جزو فرس ہو اور فرس

اور مستوی س کے عماد کے درمیان زاویہ طہ ہو تو یہ ضابطہ یوں لکھا جاسکتا ہے

∫ س جم طہ فر س ....(۵)

یہ مسئلہ تین ابعادی جواب ہے مسئلہ دفعہ ۱۰۳ کا جو اس امر سے متعلق ہے کہ ایک متحرک خط اپنی حرکت میں کتنا رقبہ عبور کرتا ہے۔ مسئلہ زیر بحث اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔

۲۶۹ **۱۱۸۔ ضعفی تکملے۔** اس کتاب کی بحث زیادہ تر ایک متغیر کے تفاعلوں تک محدود رہی ہے اور اس لئے جہاں تک تکملی احصا کا تعلق ہے یہ ایسے مسائل پر بحث کرتی ہے جو ایک تکمل پر منحصر ہیں یا ایک تکمل پر لاکے منحصر کئے جاسکتے ہیں۔ لیکن ضعفی تکملے مضمون کے طبیعی استعمال میں ترقیم وغیرہ کے طور پر اس کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ان کے متعلق چند تشریحات کا یہاں دیدینا سودمند ہوگا۔ نظری امور پر صرف سرسری توجہ کی جائے گی۔ باضابطہ بحث کے لئے دفعہ ۹۰ کے طریقہ کی مناسب ترمیم کیجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ی، متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے

ی = فہ (لا، ما) ....(۱)

اسکی ہندسی تعبیر یہ ہوسکتی ہے کہ یہ ایک سطح کی مساوات ہے (دفعہ ۳۴)۔ حوالہ کے مستوی لا ما میں کوئی محدود طبقہ س لو اور فرض کرو کہ ایک اسطوانی سطح ایک خط مستقیم کے ذریعہ پیدا کیجاتی ہے جو ہمیشہ س کے محیط سے ملتا ہے اور ی کے محور کے متوازی رہتا ہے۔ اس جسم ح پر غور کرو جو اس اسطوانہ، مستوی لا ما اور سطح (۱) کے درمیان گھرا ہے۔ دیکھو شکل ۶۸ صفحہ ۳۶۹۔

اگر طبقہ س کو رقبہ کے اجزا مف ق$_1$، مف ق$_2$، مف ق$_3$ ..... میں تقسیم کیا جائے اور ان اجزا کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے کھینچے ہوئے سطح (۱) کے معین ی$_1$، ی$_2$، ی$_3$ ...... ہوں تو محوروں کو علی القوائم فرض کر کے مجموعہ

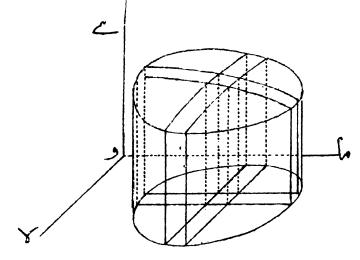
ی$_1$ مف ق$_1$ + ی$_2$ مف ق$_2$ + ی$_3$ مف ق$_3$ + ...(۲)

۲۷۰ ..... ی، ی، ی سے منشوروں کے ایک نظام کا کل حجم ملیگا جن کے ارتفاع ی۱، ی۲، ....
ہیں اور جو قاعدوں مف ق۱، مف ق۲ .... پر قائم ہیں۔

شکل (۶۸)

اور اگر تفاعل فا (لا، ما) بعض شرائط کو پورا کرے جو عام طور پر تفاعل پورا کرتے ہیں* تو اوپر کا مجموعہ، جبکہ مف ق۱، مف ق۲، مف ق۳ ..... کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے ایک یگانہ انتہائی قیمت کی طرف مستدق ہوگا۔ یہ انتہا حجم ح ہے۔ اگر طبقہ س کے چھوٹے حصے محاور لا اور ما کے متوازی ہوں تو اجزا مف ق۱، مف ق۲، .... نمونہ مف لا مف ما کے مستطیلی رقبے ہونگے اور مجموعہ (۲)

$$\Sigma\Sigma$$ ی مف لا مف ما .... (۳)

---

* تسلسل کی شرط جس کا پہلے سے ذکر کیا گیا ہے وہ کافی ہے لیکن ثبوت میں سہولت پیدا ہوگی اگر یہ زائد شرط شریک کر دیجائے کہ مستوی لا ما کے کسی محدود رقبہ کے اندر فا (لا، ما) کی اعظم اور اقل قیمتیں تعداد میں محدود ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۰۔

سے تعبیر ہو سکیگا جہاں ح دوبارآتا ہے کیونکہ مجموعہ دو ابعاد میں لیا جاتا ہے۔ اس مجموعہ کی انتہائی قیمت ذیل کی علامت سے تعبیر ہو گی۔

∫∫ی فرلا فرما ..... (۴) [∫∫ Zdxdy]

اور حجم کے لئے ضابطہ ہوگا ح = ∫∫ فہ (لا، ما) فرلا فرما .... (۵)

بائیں جانب کا جملہ "دوہرا تکملہ" کہلاتا ہے۔ اسکی قیمت کی تعیین نہیں ہو سکتی جب تک کہ متغیروں لا، ما کی وسعت جسکی سی کے محیط سے حدبندی ہوتی ہے متعین نہ ہو سکے۔

حجم ح ایک اور طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر ف (لا) سطح کی ایک تراش کا رقبہ ہو جو ما ی کے متوازی ایک مستوی سے کٹتی ہے جس کا فصل لا ہے تو دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

ح = ∫ ف (لا) فرلا .... (۶)

جہاں رقبہ س سے متعلق لا کے حدود ا، ب ہیں۔ لیکن دفعہ ۱۰۰ کی رو سے

ف (لا) = ∫ ی فرما .... (۷)

جہاں عہ، بہ تراش ف (لا) میں ما کے حدود ہیں جو بالعموم لا کے تفاعل ہونگے۔ اس لئے

ح = ∫ { ∫ فہ (لا، ما) فرما } فرلا .... (۸)

یا جیسے اسکو بالعموم لکھا جاتا ہے

ح = ∫∫ فہ (لا، ما) فرلا فرما ... (۹)+ [∫∫ f (x,y) dxdy]

+ پہلا تکملہ فرلا سے متعلق ہے اور دوسرا فرما سے۔ اس امر کے متعلق کوئی پورے طور پر یکساں قرارداد نہیں ہے۔

۲۷۱

اگر دونوں تکملوں کے حدود مستقل ہوں یعنی اگر طبقہ س ایک مستطیل کی شکل کا ہو جس کے اضلاع محاور لا اور ما کے متوازی ہیں تو حجم اس طور پر بھی بیان ہو سکیگا

(۱۰) .... فرما | فرلا (لا ، ما) فہ $\int_{د}^{ب}$ { $\int_{عہ}^{بہ}$

اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ

(۱۱) ...... فرما، فرلا (لا ، ما) فہ $\int_{د}^{ب}\int_{عہ}^{بہ}$ = فرما فرلا (لا ، ما) فہ $\int_{عہ}^{بہ}\int_{د}^{ب}$

اس کی توضیح شکل ۲۳ دفعہ ۳ سے ہوتی ہے ۔ اور صورتوں میں جب تکمل کی ترتیب کو بدلا جائے تو مختلف تکملوں کے حدود کی ترمیم ضروری ہوتی ہے ۔

اوپر کی تشریح ہندسی شکل میں ہے لیکن نفس مضمون کے لئے یہ ضروری نہیں ۔ مثلاً ایک مستوی پتر ے کی کمیت نکالنے میں جس کے کسی ایک نقطہ (لا ، ما) پر کثافت معلوم ہو، تیز کئی اور طبیعی سوالات میں یہی اصول شامل ہوتے ہیں ۔

رقبہ س کی تحلیل کے لئے ایک اور طریقہ سودمند ہوتا ہے مستوی لا ما میں قطبی محدود (ر ، طہ) لو ۔ رقبہ س کو مستطیل نما اجزا میں ہم مرکز دائروں اور نیم قطروں کے ذریعہ تقسیم کیا جاسکتا ہے ۔ ایسے کسی ایک جزو کا رقبہ ر مف طہ مف ر ہے اگر ر دو منحنی اضلاع کے نیم قطروں کا اوسط حسابی ہو۔ ضابطہ (۸) اس طرح یہ شکل اختیار کرتا ہے

ح = $\int\int$ ی ر فر طہ ، فر ر ...... (۱۲) [$\int\int$ Zr dθdr]

جہاں ی ایک دیا ہوا تفاعل ہے ر اور طہ کا ۔

جو اوپر بیان ہوا اسکے بعد تہرے تکملہ

(۱۳) .... فہ (لا ، ما ، ی) فرلا فرما فری $\int\int\int$

کے مفہوم کو زیادہ پختہ کرنے کی ضرورت نہیں ۔ ایک محدود حلا کے حصہ س کو محوروں کے

متوازی مستوی کھینچنے سے قائم عناصر مف لا مف ما مف ی میں تقسیم کرو۔ اگر ان عنصروں میں سے ہر ایک کے حجم کو ان میں کے کسی اختیاری طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ پر جو تفاعل فہ (لا، ما، ی) کی قیمت ہے اس کے ساتھ ضرب دیا جائے تو جملہ (۱۳) سے ایسے حاصل ضربوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت (بعض شرائط کے تابع) تعبیر ہوگی جبکہ ان عنصروں کے ابعاد کو لاانتہا کم کیا جائے یہی انتہائی قیمت تین سادہ تکملوں کے تواتر سے حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$\int_{ل}^{م} \left\{ \int_{عہ}^{بہ} \left(\int_{ا}^{ب} فہ(لا، ما، ی)\, فری \right) فرما \right\} فرلا \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

جہاں تکمل بلحاظ ی کے حدود (ا) اور ب کے اندر ہے جو عام طور پر لا، ما کے تفاعل ہیں پھر تکمل بلحاظ ما کے حدود عہ، بہ کے درمیان ہے جو بالعموم لا کے تفاعل ہیں اور اخیر میں تکمل بلحاظ لا کے ہے حدود ل، م کے اندر۔

۲۷۲

اگر تکمل کے حدود سب مستقل ہوں تو تکمل کی ترتیب کے بدلنے سے یہ حدود نہیں بدلتے۔

مثال کے طور پر ایک مجسم کی کمیت معلوم کرنے کے سوال پر غور کرو جہاں کثافت لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔

مثال ۱۔ اُس فانہ کا حجم دریافت کرو جو گھرا ہوا ہے مستوی ی = ۰، اسطوانہ

$$لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

اور مستوی ی = لا سس عہ کے اس حصہ کے درمیان جس کے لئے ی مثبت ہے۔

$$\iint ی\, فرلا\, فرما = سس\, عہ \int^{ا} \int_{-\sqrt{ا^{2}-لا^{2}}}^{\sqrt{ا^{2}-لا^{2}}} لا\, فرلا\, فرما \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

بلحاظ ما کے تکمل سے حاصل ہوتا ہے $\left[لا\, ما \right]_{-\sqrt{ا^{2}-لا^{2}}}^{\sqrt{ا^{2}-لا^{2}}} = ۲لا\sqrt{ا^{2}-لا^{2}}$

تب $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} ۲\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \left[-\frac{۲}{۳}(\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ا}} = \frac{۲}{۳}\text{ا}^۳$

مطلوبہ حجم اس لئے یہ ہے $\frac{۲}{۳}\text{ا}^۳$ مس عہ .... (۱۷)

مثال ۲ - حجم جو کرہ $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ = \text{ا}^۲$ .... (۱۸)

اور اسطوانہ $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = \text{ا}\,\text{لا}$ .... (۱۹)

کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔

(اسطوانہ کا نیم قطر کرہ کے نیم قطر سے آدھا ہے اور اس کا محور کرہ کے ایک نصف قطر کی علی القوایم تنصیف کرتا ہے)۔

اگر مستوی لا ما میں قطبی محدد شامل کئے جائیں تو مساوات (۱۹) یہ شکل اختیار کرتی ہے $\text{ر} = \text{ا}\,\text{جم}\,\text{طہ}$ .... (۲۰)

اور (۱۸) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ی} = \pm\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ر}^۲}$ .... (۲۱)

مطلوبہ حجم اس لئے ہے

$$۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}} \text{ی}\,\text{ر}\,\text{فرطہ}\,\text{فرر} = ۴\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}}\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ر}^۲}\,\text{ر}\,\text{فرطہ}\,\text{فرر}$$

.... (۲۲)

اب $\int_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}}\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ر}^۲}\,\text{ر}\,\text{فرر} = \left[-\frac{۱}{۳}(\text{ا}^۲ - \text{ر}^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{\text{ب}}^{\text{ا جم طہ}}$

$$= \frac{\text{ا}^۳}{۳}(۱ - \text{جب}^۳\,\text{طہ})$$

اور $\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱ - \text{جب}^۳\,\text{طہ})\,\text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{۳}$

بالآخر نتیجہ ہے $\frac{۲}{۳}\pi\,\text{ا}^۳ - \frac{۸}{۹}\text{ا}^۳$ .... (۲۳)

امثلہ ۳۶*

۱۔ اگر ایک منحنی ایسا ہو کہ $ما^م \propto لا^ن$ تو ثابت کرو کہ جو مستطیل محوروں سے اور منحنی کے کسی نقطہ میں سے محددوں کے متوازی خط کھینچنے سے بنتا ہے منحنی اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جنکے رقبے نسبت م : ن میں ہوتے ہیں۔

۲۔ محور لا اور منحنی $ما = ب \, جب \frac{لا}{ا}$ کی نیم موج کی درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ا ب ہے۔

۳۔ زنجیرہ $ما = ج \, جمز \frac{لا}{ج}$، محور لا، اور خطوط $لا = ۰$، $لا = لا_۱$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $ج^۲ \, جمز \frac{لا_۱}{ج}$ ہے۔

۴۔ منحنی $ا^۲ ما = لا^۲ (لا + ا)$ محور لا کی ساتھ ملکے $\frac{ا^۲}{۱۲}$ رقبہ گھیرتا ہے۔

۵۔ محور لا اور منحنی $ما = ق^{-ع لا} جب \, ب لا$ کے متواتر نیم موجوں کے درمیان جو رقبے ہیں ثابت کرو کہ وہ تنزولی ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک $ق^{-\frac{ع \pi}{ب}}$ ہے۔

۶۔ محور لا اور مکافی $ج ما = (لا - ا)(لا - ب)$ کے درمیان رقبہ $\frac{۱}{۶} \frac{(ا - ب)^۳}{ج}$ ہے

۷۔ منحنیوں $۲ ما^۲ - ۳ ما = لا - ۱$، $ما^۲ - ۲ ما = لا - ۳$ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $[\frac{۹}{۴}]$

۸۔ مکافیوں $ما = ۲ لا^۲ - لا - ۳$، $ما = - ۲ لا^۲ + ۴ لا + ۷$ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ $[\frac{۴۵}{۲}]$

---

* مشق کے لئے اور مثالیں "خاص منحنیات" کے نویں باب کے ختم پر ملینگی۔

۹ — مکافی ما = لا² - لا + ۹ کا قطعہ جو خط مستقیم ما = ۳ - ۲لا سے کٹتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ $\left[\frac{۱}{۶}\right]$

۱۰ — مکافیون ما² = ۴ا (لا + ا)، ما² = ۴ب (ب - لا) کے درمیان کا رقبہ $\frac{۸}{۳}$ (ا + ب) √اب ہے۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کل رقبہ (جبکہ یہ محدود ہو) جو محور لا اور منحنی ما = $\frac{۱}{عا}$ فا $\left(\frac{لا}{عا}\right)$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ عا کی قیمت پر منحصر نہیں۔ ۲۷۴

۱۲ — منحنی ما = ب مسز $\frac{لا}{ا}$ کی مثبت شاخ، اسکے متقارب اور محور ما کے درمیان کا رقبہ اب لوگ ۲ ہے۔ [دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۵]

۱۳ — دو ناقصوں $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$، $\frac{لا^۲}{ب^۲} + \frac{ما^۲}{ا^۲} = ۱$ کا مشترک رقبہ ۴اب مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{ا}$ ہے۔

۱۴ — رقبہ جو محددوں کے محوروں اور مکافی $\left(\frac{لا}{ا}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{ما}{ب}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۱}{۶}$ اب جب سہ ہے جہاں محوروں کے درمیان کا زاویہ سہ ہے [رکھو لا = ا جب⁴ طہ، ما = ب جم⁴ طہ]

۱۵ — مکافی ۲ج ما = لا² + ا² اور اس کے دو مماسوں کے درمیان جو مبدأ سے کھینچے جائیں رقبہ $\frac{۱}{۳}\frac{ا^۳}{ج}$ ہے۔

۱۶ — مکافیون ما² = ۴ا لا، لا² = ۴ا ما کا مشترک رقبہ $\frac{۱۶}{۳}$ ا² ہے۔

۱۷ — تکمل سے ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ ہے π عا با جب سہ جہاں عا، با مزدوج نیم قطروں کے کسی جوڑے کے طول ہیں اور سہ ان کے درمیان زاویہ ہے۔

۱۸ — تکمل بالحصص کا ضابطہ [دفعہ ۸۰ (۲)] اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\int ع\, فرو = ع و - \int و\, فرع$$

ہندسی طور پر رقبوں کی رقوم میں اسکی تعبیر بیان کرو۔

۱۹۔ باریک پترے پر ایک منحنی ا ب بنایا گیا ہے اور پترا اپنی سطح میں ثابت نقطہ و کے گرد زاویہ طہ میں سے گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{2}(و ا^2 - و ب^2) طہ$$

۲۰۔ منحنی ر = ۳ + ۲ جم طہ کو مرتسم کرو اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔ (۱۱ π)

۲۱۔ منحنی ر = ۲ ا (۱ + جم طہ) کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو مکافی $ر = \frac{۲ ا}{۱ + جم طہ}$ کے باہر واقع ہوتا ہے۔ $[۳ \pi ا^2 + \frac{۱۶}{۳} ا^2]$ ۲۷۵

۲۲۔ قطبی محددوں میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ کا رقبہ $\frac{\pi}{\sqrt{اب - ھ^2}}$ ہے۔

۲۳۔ ایک بے وزن رسی کا طول ل ہے، یہ ایک ثابت نقطہ و سے بندھی ہے اور ایک چھوٹے چھلے میں سے گذرتی ہے جو (چھلہ) ایک افقی سلاخ ا ب پر پھسل سکتا ہے، سلاخ، و میں کی انتصابی سطح میں واقع ہے۔ رسی کا نچلا حصہ انتصابا نیچے لٹکتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک چھوٹا وزن پ بندھا ہے پ کا طریق دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس طریق اور ا ب کے درمیان رقبہ ل $\sqrt{ل^2 - گ^2}$ - گ^2 جم$^{-1}$ $\frac{ل}{گ}$ ہے جہاں گ گہرائی ہے ا ب کی نقطہ و سے۔

۲۴۔ ہندسی تخیلات کی بنا پر ثابت کرو کہ مکافی کے دو ماسکی نیم قطروں اور منحنی کے درمیان رقبہ اس رقبہ کا نصف ہے جو منحنی مرتب پر کے متناظر عمودوں اور مرتب کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

۲۵۔ (شکل ۵۹) بتاؤ کہ ایمسلر کے سطح پیما میں پہیہ کے درجوں سے کیا ظاہر

ہوگا جبکہ سلاخ پ ق ایک پورا چکر لگاتی ہے اور نقطہ ق ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے۔

۲۶۔ ایک سطح پیما ایسی شکل کا ہے کہ اس کے جس بازو کے ساتھ مرتسم نقطہ لگا ہوا ہے اس کا دوسرا سرا ایک انتصابی محور پر چول کی صورت میں لگا ہوا ہے۔ انتصابی محور کو ایک چھوٹی گاڑی اٹھائے پھرتی ہے جو کاغذ پر (بغیر پھسلنے کے) آگے پیچھے لڑک سکتی ہے اور اسکے ساتھ ایک درجہ دار پہیہ لگا ہوا ہے جو کل لڑکنے کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب مرتسم نقطہ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو پہیہ کے نشانات سے کسی خاص پیمانہ پر رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ ایک سلاخ پر تین نقطے ا، ب، ج ہیں، یہ سلاخ اپنے مستوی میں حرکت کرتی ہے اور یہ نقطے بند منحنی مرتسم کرتے ہیں جن کے رقبے $س_ا$، $س_ب$، $س_ج$ ہیں، سلاخ بغیر پورا چکر لگانے کے اپنے اصلی مقام پر پھر آجاتی ہے، ثابت کرو کہ

$$ب ج \times س_ا + ج ا \times س_ب + ا ب \times س_ج = ۰$$

جہاں خطوط ب ج، ج ا، ا ب کی علامات انکی سمتوں کے مطابق ہیں اور $س_ا$، $س_ب$، $س_ج$ کی علامتیں دفعہ ۱۰۱ کے قاعدہ سے متعین ہوتی ہیں۔

۲۸۔ سلاخ ا ب پر ایک نقطہ پ ہے، یہ سلاخ ایک ہی مستوی میں حرکت کرتی ہے اور ایک گردش پوری کرنے کے بعد اپنے اصلی مقام پر واپس آجاتی ہے۔

ثابت کرو کہ $$س_پ = \frac{ا س_ب + ب س_ا}{ا + ب} - \pi ا ب$$

جہاں ا = ا پ، ب = پ ب اور $س_ا$، $س_ب$، $س_پ$ کا مفہوم وہی ہے جو اوپر کے سوال میں۔ ۲۷۶

اس لئے ثابت کرو کہ اگر سلاخ کے سرے ا، ب ایک بند بیضوی منحنی پر حرکت کریں تو $س_ا - س_پ = \pi ا ب$ [ہولڈچ]

۲۹ — مستقل طول کا ایک خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت متقاطع خطوط مستقیم پر ہمیشہ واقع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ پ ایک ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ π × اپ × پ ب ہے۔

امثلہ* ۳۷

حجم

۱ — منحنی ما = ب جب $\frac{لا}{ا}$ کی نسیم موج کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے ثابت کرو کہ وہ حائط اسطوانہ کا نصف ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ ایک مخروط ناقص کا حجم جس کے سرے متوازی ہیں

$$\frac{۱}{۳} ف \{ ق_۱ + \sqrt{ق_۱ ق_۲} + ق_۲ \}$$

ہے جہاں $ق_۱$، $ق_۲$ اسکے سروں کے رقبے ہیں اور ف ان کے درمیان عمودی فاصلہ ہے۔

۳ — محور لا کے گرد قائم زائد $لا^۲ - ما^۲ = ا^۲$ کی گردش سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کے ایک قطعہ کا حجم جسکی اونچائی ا ہو جسے رأس سے ناپا جائے ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا جس کا نیم قطر ا ہو۔

۴ — ایک قطعہ کرہ دو متوازی مستویوں سے گھرا ہوا ہے جن کا درمیانی عمودی فاصلہ ف ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا حجم، اس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع ف ہے اور جسکی عمودی تراشش کا رقبہ مستوی سروں کے رقبوں کا اوسط حسابی ہے بقدر اس کرہ کے حجم کے زیادہ ہے جس کا قطر ف ہے۔

۵ — ایک نیم کرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے قاعدہ سے فاصلہ ۲ ا جب ۱۰° پر، قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیم کرہ کے حجم کی

* دیکھو صفحہ (۳۷۴) کے نیچے کا نوٹ۔

تنصیف کرتا ہے۔

٦ — نیم قطر ا کے ایک ٹھوس کرہ کا جو حصہ، نیم قطر ب $(< ۲ ا)$ کی کروی سطح کے اندر شامل ہے جس کا مرکز ٹھوس کرہ کی سطح پر واقع ہے اس حصہ کو نکالدیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے خلا کا حجم نیم قطر ب کے نیم کرہ کے حجم سے بقدر

$\frac{\pi ب^4}{4 ا}$ سے کم ہے۔

٧ — جو قطعہ مکافی $ج ما = (لا - ا)(لا - ب)$ اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{30}\pi (ا - ب)^5 / ج^2$$

٨ — اگر ایک قطعہ مکافی معین کے گرد گھومے تو حجم پیدا شدہ حائط اسطوانہ کے $\frac{8}{15}$ کے مساوی ہوگا۔ ٢٧٧

٩ — ایسے مجسم کا حجم جو مکافی کو اُس پر کے ماس کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے حائط اسطوانہ کا $\frac{1}{5}$ ہے۔

١٠ — مکافی $ما^2 = 4 ا لا$ کا وہ حصہ جو وتر خاص سے کٹتا ہے، مرتب کے گرد گردش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ پیدا شدہ حلقہ نما مجسم کا حجم $\frac{152}{15}\pi ا^3$ ہے۔

١١ — وتر $لا = ف$ منحنی $ا ما^2 = لا^3$ سے جو حصہ کاٹتا ہے اسے محور لا کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ حجم پیدا شدہ اُس اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جو اسی قاعدہ پر قائم ہے۔

١٢ — مثلثی منشور کے ایسے مقطوعہ کا حجم جس کو کوئی دو مستوی قطع کریں

$\frac{1}{3}(ف_1 + ف_2 + ف_3)ق$ ہے جہاں $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ تین متوازی کناروں کے طول ہیں اور ان کناروں پر عمود وار تراش کا رقبہ ق ہے۔

١٣ — ایک پیپے کی وسطی تراش کا نیم قطر ب ہے اور ہر سرے کا نیم قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ پیپے کا حجم ہے $\frac{\pi}{15}(3 ا^2 + 4 ا ب + 8 ب^2) ف$

جہاں ف پہیے کا طول ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ پہیے کا مکون منحنی مکانی کی ایک قوس ہے۔

۱۴۔ دائرہ کی ایک قوس اپنے وتر کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کا حجم ہے

$$\frac{۴}{۳}\pi ا^۳ جب ع_۱ + \frac{۲}{۳}\pi ا^۳ جب ع_۱ جم^۲ ع_۱ - ۲\pi ا^۳ ع_۱ جم ع_۱$$

جہاں ا نیم قطر ہے اور ۲ ع۱ قوس کی زاوی پیمائش ہے۔

۱۵۔ وہ شکل جو نیم قطر ا کے دائرہ کے ربع اور اس کے سروں کے مماسوں سے گھری ہوئی ہے ان مماسوں میں سے ایک کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ہے

$$\left(\frac{۵}{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)\pi ا^۳$$

۱۶۔ دو مساوی نیم قطر ا کے قائم مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دونوں سے گھرا ہوا حجم $\frac{۱۶}{۳} ا^۳$ ہے۔
اگر ان کے محور زاویہ ع۱ پر قطع کریں تو حجم $\frac{۱۶}{۳} ا^۳$ قم ع۱ ہے۔

۱۷۔ اگر قطع زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ محور لا کے گرد گھومے تو وہ حجم جو اس سطح، متقاربوں سے تکوین شدہ مخروط اور محور لا کے علی القوائم دو مستویوں کے درمیان گھر جاتا ہے جہاں مستویوں کا فصل ف ہے اس مستدیر اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور نیم قطر ب۔

۱۸۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا نصف زاویہ ع۱ ہے، اس کا راس نیم قطر ا کے ایک کرہ کی سطح پر ہے اور اس کا محور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے اس حصہ کا حجم جو مخروط سے باہر ہے $\frac{۴}{۳}\pi ا^۳ جم^۴ ع_۱$ ہے۔ ۲۰۸

۱۹۔ المرفعہ ۱۰۹ کے سمپسن کے طریقہ میں جہاں دو متوازی تراشوں $س_۱$، $س_۲$ کے درمیان جو حجم شامل ہے وہ معلوم کیا گیا ہے، درمیان کی تراش $س_۲$ تراشوں $س_۱$، $س_۲$ سے بالترتیب فاصلوں ھ، ک پر ہو تو ضابطہ ہوگا

$\frac{ه+ک}{6 ه ک}$ {(۲ھ-ک) ک س۱ + (ھ+ک)۲ س۲ + (۲ک-ھ) ھ س۳}

امثلہ ۲۸*

منحنی خط اور سطحیں

۱- جیب کے منحنی ما = ب جب $\frac{لا}{ج}$ کی پوری موج (Undulation) کا طول ایک ناقص کے محیط کے مساوی ہے جسکے نیم محور $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ اور ا ہیں۔

۲- کسی منحنی میں مبدأ سے اسکے کسی مماس پر جو عمود (ع) کھینچ سکتا ہے اسکے طول کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو۔

$$ع = لا \frac{فرما}{فرس} - ما \frac{فرلا}{فرس}$$

نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر کا مماس پر قائم ظل ہے

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} \quad یا \quad ر \frac{فرر}{فرس}$$

۳- زنجیرہ (Catenary) ما = ج جم $\frac{لا}{ج}$ کی کسی قوس کو جو راس سے شروع ہوتی ہے، مرتب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح π (ج لا + ما س) ہے جہاں لا، ما، س اس قوس کے دوسرے سرے سے متعلق ہیں۔

۴- گردشی سکافی نما سے محور پر علی القوائم مستوی سے منحنی سطح کا جو حصہ کٹتا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{6} \frac{\pi ب}{ف^2} \{(4ف^2 + ب^2)^{\frac{3}{2}} - ب^3\}$$

---

* صفحہ ۳۷۴ کے نیچے نوٹ دیکھو۔

جہاں محور کا طول ف ہے اور احاطہ کرنے والے دائرہ کا نیم قطر ب۔

۵۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کی قوس کو جو مبدا اور معین لا = ۳ ا کے درمیان ہے محور لا کے گرد گھمانے سے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے وہ $\frac{56}{3}$ ‏π ا^2 ہے۔

۶۔ مکافی کی قوس کا وہ حصہ جو راس اور وتر خاص کے درمیان واقع ہے محور کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مجسم کی منحنی سطح قاعدہ کے رقبہ کی ۲۱۹ ء ۱ گنا ہے۔

۷۔ دائرہ کی قوس اپنے وتر کے گرد گھومتی ہے، ثابت کرو کہ سطح جو پیدا ہوتی ہے وہ ہے ۴ π ا^2 (جب عما ۔ عما جم عما) جہاں ا نیم قطر ہے اور قوس کا زاویہ ناپ ۲ عما ہے۔

۸۔ نیم قطر ا کے دائرہ کا ربع اپنے سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ منحنی سطح کا رقبہ π (π ۔ ۲) ا^2 ہے۔

۹۔ نیم قطر ا کا ایک ثابت کرہ ہے۔ اسکی سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر نیم قطر ر کا ایک متغیر کرہ بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسکی سطح کا رقبہ جو ثابت کرہ کے حائل ہونے سے قطع ہوتا ہے وہ زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ ر = $\frac{4}{3}$ ا۔

۱۰۔ کرہ کا ایک مماسی مخروط کھینچا گیا ہے اور مخروط کے راس کو مرکز مان کر دو کروی سطحیں کھینچی گئی ہیں جو کرہ اور مخروط دونوں کو قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کرہ اور مخروط پر جو متعلقے قطع ہوتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں۔

امثلہ ۳۹

تقریبی تربیع ۔ اوسط قیمتیں

۱۔ لوک$_{و}$ ۲ کو ضابطہ لوک$_{و}$ ۲ = $\int_1^2 \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ سے حاصل کرنیکے لئے سمسن کا قاعدہ لگاؤ۔ [ٹھیک قیمت ہے لوک$_{و}$ ۲ = ۶۹۳۱۴۷ء ۰...]

۲۔ π کی قیمت ضابطہ $\frac{\pi}{6} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$ سے حاصل کرو۔

۳ — (دفعہ ۱۱۴) تین معین والے سمسن کے طریقہ میں، درمیانی معین $\text{ما}_۲$ معینوں $\text{ما}_۱$، $\text{ما}_۳$ سے غیر مساوی فاصلوں ھ، ک پر ہے، اس صورت میں ضابطہ ہے

$$\frac{1}{6}(\text{ھ}+\text{ک})(\text{ما}_۱+۴\,\text{ما}_۲+\text{ما}_۳)+\frac{1}{6}(\text{ھ}^2-\text{ک}^2)\left(\frac{\text{ما}_۱-\text{ما}_۲}{\text{ھ}}-\frac{\text{ما}_۲-\text{ما}_۳}{\text{ک}}\right)$$

۴ — قطع ناقص کے قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان قطروں کے مربعوں کا اوسط، اعظم اور اصغر محوروں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۵ — طول ا کے خط مستقیم پر ایسے ہی کوئی نقطہ لے لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ دو حصوں کی سطح کا اوسط رقبہ $\frac{1}{6}$ ا^2 ہے اور دو حصوں کے مربعوں کے مجموعہ کی اوسط قیمت $\frac{2}{3}$ ا^2 ہے۔

۶ — اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو وقت کے مساوی اور لا متناہی چھوٹے وقفوں پر کی رفتاروں کا اوسط مربع

$\frac{1}{3}(\text{و}^2+\text{و}\,\text{و}_۱+\text{و}_۱^2)$ کے مساوی ہے جہاں و اور $\text{و}_۱$ ابتدائی اور آخری رفتاریں ہیں۔

۷ — سادہ موسیقی حرکت میں ثابت کرو کہ اوسط توانائی بالحرکت، زیادہ سے زیادہ توانائی بالحرکت کا نصف ہے۔

۸ — ایک ذرہ، دی ہوئی رفتار، مگر اختیاری زاویہ ارتفاع سے پھینکا گیا ہے، ثابت کرو کہ اوسط افقی ٹپہ (Range) زیادہ سے زیادہ ٹپہ کا ۶۶۶۲ء ہے۔

۹ — ناقص کے ماسکی نیم قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان ماسکی نیم قطروں کا اوسط، نیم محور اصغر کے مساوی ہے۔

۱۰ — نیم کرہ کی بھی سطح پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ قاعدہ کے مستوی سے نیم قطر کے نصف کے مساوی ہے۔

۱۱ — نیم کرہ کے قطب سے کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ۹۴۲۹ء ا ہے جہاں کرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۲۸۰

۱۲ — دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے، مرکز سے، نیز محیط پر کے کسی نقطہ سے اس رقبہ پر کے نقطوں کے فاصلوں کے مکافیوں کی اوسط قیمتیں دریافت کرو۔

[$\frac{۲}{ا}$ ، $\frac{۴}{\pi ا}$]

۱۳ — ایک ڈنڈے کی شکل گردشی لمبوترے ناقص نما کی ہے جو بہت لمبا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اوسط تراشی رقبہ مرکز پر کی تراش کے رقبہ کا دوتہائی ہے۔

۱۴ — برفائی ہوئی گول ٹکیا پر سطحی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $(ا^۲ - ر^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ جہاں ٹکیا کا نیم قطر ا ہے اور ر مرکز سے نقطہ کا فاصلہ ہے۔ اوسط کثافت کی نسبت مرکز پر کی کثافت کے ساتھ دریافت کرو۔

۱۵ — اگر شہابوں (Comets) کے مدار فضا میں یکساں طور پر منقسم ہوتے تو طریق الشمس کے ساتھ ان کا اوسط میلان نیم قطری (۵۷٫۲۹۶°) ہوتا۔

۱۶ — نیم قطر ا کی کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ایک ایسے نقطہ پ سے جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے ج + $\frac{۱}{۳}$ $\frac{ا^۲}{ج}$ ہے اگر پ کرہ کے باہر ہو اور ا + $\frac{۱}{۳}$ $\frac{ج^۲}{ا}$ ہے اگر پ کرہ کے اندر ہو۔

۱۷ — ایک دائرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے محیط پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱٫۲۷۳ ا ہے۔

۱۸ — ایک دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے۔ اس پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱٫۱۳۲ ا ہے۔

۱۹ — کرہ کے اندر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ سطح پر کے ایک دئے ہوئے نقطہ سے $\frac{۶}{۵}$ ا ہے۔

۲۰ — اگر زمین کے مرکز سے فاصلہ ر پر کثافت اس ضابطہ ث = ب $\frac{\text{جب } م ر}{م ر}$ سے حاصل ہو جہاں م مستقل ہے تو ثابت کرو کہ

اوسط کثافت ہوگی $\frac{3 ث (جب م ا - م ا جم م ا)}{م^3 ا^3}$ جہاں ا

زمین کا نیم قطر ہے۔

۲۱۔ کروی شکل کی کچھ کمیت ہے جس کی کثافت مرکز سے فاصلہ د پر ث ہے، اگر نیم قطر د کے ہم مرکز کرہ کے مادہ کی اوسط کثافت ث۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ث = ث_1 + \frac{1}{3} د \frac{فر ث_1}{فر د}$$

امثلہ ۴۰

اوسط مرکز

۱۔ تکمل سے ثابت کرو کہ منحرف کا اوسط مرکز متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خط کی اِس نسبت ۲ ا + ب : ا + ۲ ب سے تقسیم کرتا ہے جہاں ا، ب متوازی اضلاع کے طول ہیں۔

۲۔ منحنی $ما = ب جب \frac{لا}{ا}$ کی ایک نیم موج اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اِس کا اوسط مرکز اِس محور سے فاصلہ $\frac{1}{8}$ π ب پر ہے۔

۳۔ منحنی $ما = \frac{ا^3}{ا^2 + لا^2}$ اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز $(0, \frac{ا}{4})$ ہے۔

۴۔ ربع دائرہ کے سروں پر مماس کھینچنے سے قوس اور ان مماسوں میں جو رقبہ گھر جاتا ہے اِس کا اوسط مرکز ہر مماس سے ۰.۲۲۳۴ ا ہے جہاں دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۵۔ جو رقبہ مکافی $(\frac{لا}{ا})^{\frac{1}{2}} + (\frac{ما}{ب})^{\frac{1}{2}} = 1$ اور محددوں کے محوروں کے درمیان گھرا ہوا ہے اِس کا اوسط مرکز نقطہ $(\frac{1}{5} ا، \frac{1}{5} ب)$ پر ہے۔ رکھو لا = ا جب^4 طہ، ما = ب جم^4 طہ۔

۶۔ نیم قطر ا کے کرہ کو ایک مستوی کے ذریعہ جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے دو قطعوں میں تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان قطعوں کے اوسط مرکزوں کا فاصلہ

کرہ کے مرکز سے $\frac{3}{4} \times \frac{(ا \pm ج)^2}{2ا \pm ج}$ ہے۔

۷۔ نیم قطر ا کا ربع دائرہ ہے، اسکی قوس اور سروں کے مماسوں سے جو شکل بنی ہے اسکو ایک مماس کے گرد پھرانے سے مجسم بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو اس مجسم کے اوسط مرکز کا فاصلہ راس سے ۰٫۰۰۶۶ ا ہے۔

۸۔ نوکدار محراب کی شکل والی قوس جو قطعہ مکانی رقبہ ا ب ن کو ب ن کے گرد پھرانے سے بنایا گیا ہے جہاں ا راس ہے اور ب ن عین ہے ثابت کرو کہ اس کا اوسط مرکز محور کو نسبت ۵ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۹۔ راس سے شروع ہو کر کافی کی ایک قوس ا ب ہے اور ب ن راس پر کے مماس پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ شکل ا ب ن کو ا ن کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکے اوسط مرکز کا فاصلہ ا سے $\frac{5}{6}$ ا ن کے مساوی ہے۔

۱۰۔ دو مساوی مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حجم کا اوسط مرکز جو ان اسطوانوں اور ان کے محوروں کے مستوی کے درمیان ہے اس مستوی سے $\frac{3}{8}$ ا کے فاصلہ پر ہے جہاں ا مشترک نیم قطر ہے۔

۱۱۔ ربع دائرہ اپنے ایک سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، اس طرح سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز راس سے ۰٫۸۰۷۶ ا کے فاصلہ پر ہے۔

۱۲۔ لنگر چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی حصہ کی منحنی سطح کے اوسط مرکز کا فاصلہ اس استوائی مستوی سے $\frac{\pi 2}{ب}$ ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۳۔ لنگر چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے اس کے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں انمیں سے کسی ایک کے حجم کا اوسط مرکز استوائی مستوی سے فاصلہ $\frac{4ب}{3\pi}$

پر ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۴۔ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کو محور ما دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے، کسی ایک حصہ کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز، مرکز سے فاصلہ

$$\frac{2}{3} \times \frac{ا^2 + ا ب + ب^2}{ا + ب} \times \frac{ا}{ب + (ا جب^{-1} ز)/ز}$$ پر واقع ہے جہاں ز خروج المرکز ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ ب < ا ۔ متناظر نتیجہ حاصل کرو جبکہ ب > ا ۔

۱۵۔ بیبیں کے مسئلے لگانے سے قائم مستدیر مخروط اور قائم مستدیر مخروطِ ناقص کا حجم اور اسکی منحنی سطح دریافت کرو۔

۱۶۔ نیم قطر ا کے ایک اسطوانہ کے گرد ایک نالی کاٹی گئی ہے جس کی عمودی تراشش نیم قطر ب والا ایک نصف دائرہ ہے، ثابت کرو کہ حجم جو نکالدیا گیا ہے وہ ہے $\pi^2 ا ب^2 - \frac{4}{3} \pi ب^3$

نیز نالی کی سطح ہے $2\pi^2 ا ب - 4\pi ب^2$

۲۸۳

۱۷۔ ایک مستدیر اسطوانہ کا نیم قطر ر ہے، اس کی سطح پر مستطیلی تراشش کا ایک پیچ تاگا کاٹا گیا ہے، ثابت کرو کہ تاگے کے ایک پھیرے کا حجم $2\pi ا ب ر + \pi ا ب^2$ ہے جہاں ا، ب مستطیل کے ضلعے ہیں اور ا وہ ضلع ہے جو اسطوانہ کی سطح پر عمود دار ہے۔

۱۸۔ ایک بند منحنی کے محیط کے اوسط مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور یہ محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِن حصوں کو اِس خط کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتے ہیں ان کی منحنی سطحیں مساوی ہیں۔

۱۹۔ رقبہ ف محاور لا اور ما کے گرد گھومنے سے حجم ع اور و بالترتیب پیدا کرتا ہے۔ بتاؤ کہ کیا رقبہ پیدا ہوگا اگر یہ خط لا جم ص + ما جب ص = ع کے گرد گھومے۔ اِس میں مان لیا جائے کہ

خط رقبے کو نہیں کاٹتا۔

امثلہ ۱۴

ضعفی تکملے

۱۔ تکملات $\iint$ (لا^2 + ما^2) فرلا فرما ، $\iint$ (۱ − $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}$ − $\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$) فرلا فرما کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ انہیں ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}$ + $\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ = ۱ کے رقبہ پر لیا جائے

۲۔ ثابت کرو کہ اسطوانوں لا^2 + ما^2 = ۲ ا لا ، ی^2 = ۲ ا لا کے درمیان کا حجم $\frac{۱۲۸}{۱۵}$ ا^3 ہے۔

۳۔ نیم قطر ۲ ا کا ایک کرہ بنایا گیا ہے جبکہ اس کا مرکز نیم قطر ا کے اسطوانہ کی سطح پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح کا جو حصہ کرہ کے اندر ہے اس کا رقبہ ۱۶ ا^2 ہے۔

۴۔ حجم جو ناقصی مکافی نما ۲ ی = $\frac{\text{لا}^2}{\text{پ}}$ + $\frac{\text{ما}^2}{\text{ق}}$ ، اسطوانہ لا^2 + ما^2 = ا^2 اور مستوی ی = ۰ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ہے $\frac{\pi \text{ ا}^4 (\text{پ} + \text{ق})}{۸ \text{ پ ق}}$

نواں باب

خاص منحنی

۱۱۹ – جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور رکھتے ہیں ۔

ما = ف (لا) .... (۱)

کے نمونہ کے جبریہ منحنیات کو مرتسم کرنیکے طریقوں کی توضیح اس کتاب کے مختلف حصوں میں کی گئی ہے جہاں ف (لا) منطق تفاعل تھا اور ان ترسیمی طریقوں میں تقاربوں، اعظم اقل معینوں اور نقاط انعطاف کا دریافت کرنا بھی شامل تھا۔ (دیکھو دفعات ۱۳، ۱۴، ۵۱، ۶۷)

عام طور پر جبریہ منحنیات کا مطالعہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن نمونہ

ما^2 = ف (لا) .... (۲)

کے منحنیات کی بحث میں کچھ جگہ وقف کردینا سود مند ہوگا۔

اس مساوات سے لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی لیکن مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں، اس لئے منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہے نیز چونکہ ما^2 لازماً مثبت ہے اس لئے لا کی ان سمتوں کے اندر (اگر ایسی موجود ہوں) جن کے لئے ف (لا) منفی ہے منحنی کا کوئی حقیقی حصہ نہیں ہو سکتا۔

مثلاً اگر ف (لا) میں ایک سادہ جزو ضربی لا – لا$_1$ شامل ہوتا ہے اور اس لئے مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

ما^2 = (لا – لا$_1$) فا (لا) .... (۳)

تو بائیں جانب کا رکن علامت بدلتا ہے جیسے لا ، لا۱ کی قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اس لئے (لا۱ ، ۰) کے ایک جانب معین خیالی ہے۔

نیز اس نقطہ پر $\left(\frac{مف ما}{مف لا}\right)^2 = \frac{ما^2}{(لا - لا_1)^2} = \frac{فا(لا)}{لا - لا_1}$

اور اس لئے $\frac{فر ما}{فر لا} = \infty$ ، اس لئے مماس و لا پر عمود وار ہے۔

اگر بر عکس اسکے ف (لا) دوہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$ما^2 = (لا - لا_1)^2 فا(لا) \qquad \text{......(۴)}$$

۲۸۵ تو بائیں جانب کا جملہ علامت نہیں بدلتا جبکہ لا قیمت لا۱ میں سے گزرتا ہے۔ اسلئے معین نقطہ (لا۱ ، ۰) کے دونوں جانب حقیقی ہے یا دونوں جانب خیالی۔ پہلی صورت میں نقطہ زیر بحث میں سے منحنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک زاویہ پر قطع کرتی ہیں اور ایک "عقدہ" بناتی ہیں۔ دوسری صورت میں (لا۱ ، ۰) طرق پر اکیلا یا "مزدوج" نقطہ ہے۔ عقدہ پر مماسی خطوط کی سمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2 = نہا_{لا \to لا_1} \frac{ما^2}{(لا - لا_1)^2} = فا(لا_1)$$

اگر ف (لا) تہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$ما^2 = (لا - لا_1)^3 فا(لا) \qquad \text{......(۵)}$$

تو بائیں جانب کا جملہ نقطہ (لا۱ ، ۰) پر علامت بدلتا ہے۔ پس اس نقطہ کے ایک جانب منحنی خیالی ہے۔ نیز چونکہ $\frac{فر ما}{فر لا}$ اس صورت میں صفر ہے منحنی محور لا کو مس کرتا ہے۔

یہاں چند مثالیں دیجاتی ہیں۔ ابتدا میں ایسی صورتیں ہیں جن میں ف (لا) صحیح اور منطق بھی ہے۔

مثال ۱ - جس صورت میں ف (لا) پہلے یا دوسرے درجہ کا ہے مثلاً

ما² = ا لا² + ب، ما² = ا لا² + ب لا + ج ..... (۶)

تو منحنی ایک مخروطیہ ہے جس کا محور لا صدری محور ہے۔

مثال ۲ - کعبی منحنیات

ما² = ا لا³ + ب لا² + ج لا + د .... (۷)

میں بعض دلچسپ صورتیں شامل ہوتی ہیں۔

(ا) اگر بائیں جانب کے خطی اجزائے ضربی حقیقی اور الگ الگ ہوں تو اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

ا ما² = (لا - عا)(لا - با)(لا - جا) ...... (۸)

اور یہ فرض کر لینے سے عمومیت کم نہیں ہو جاتی کہ ا مثبت ہے اور عا < با < جا
لا < عا کے لئے اور با < لا < جا کے لئے معین خیالی ہیں۔ (عا، ۰) اور (با، ۰) کے درمیان ما² کی اعظم قیمت ہے۔ اسلئے منحنی ایک بند حلقہ اور ایک لاانتہا شاخ پر مشتمل ہے۔ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے

ما² / لا² = لا / ا (۱ - عا / لا)(۱ - با / لا)(۱ - جا / لا)

یعنی منحنی، لا کے محور پر تقریباً عمود وار ہونے جانیکا میلان رکھتا ہے۔

(ب) اگر (۷) کے بائیں طرف کا جملہ صرف ایک حقیقی جزو ضربی رکھتا ہو تو مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

ا ما² = (لا - عا)(لا² + پ لا + ق) .... (۹)

جہاں پ² < ۴ق۔ اس صورت میں منحنی محور لا سے صرف ایک دفعہ ملتا ہے۔

(ج) شکل (۸) سے شکل (۹) میں گذرنے والے طرح سے عمل میں آتا ہوا خیال کیا جا سکتا ہے ۲۸۶
ایک نقطۂ نظر یہ ہے کہ عا، با، جا میں سے بڑی دو قیمتوں کے مل جانے سے یہ خاص صورت پیدا ہو یعنی

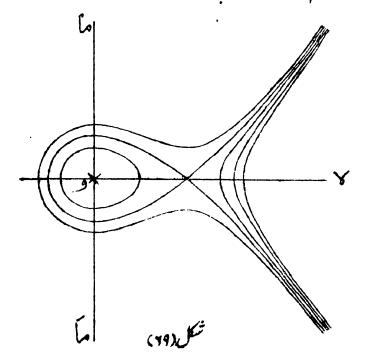
ا ما² = (لا - عا)(لا - با)² .... (۱۰)

یہاں لا < عہ کے لئے ما خیالی ہے اور لا > عہ کے لئے حقیقی ہے لیکن لا = بہ کے لئے یہ صفر ہوتا ہے۔ نقطہ (بہ، ۰) یہاں عقدہ ہے۔ اسے یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ پہلی صورت کے حلقہ اور لا متناہی شاخ کے ملنے سے یہ پیدا ہوا ہے۔

(د) اگر عہ، بہ، جہ میں سے دو چھوٹی قیمتیں مل جائیں تو

ا ما^2 = (لا ـ عہ)^2 (لا ـ جہ) .... (۱۱)

لا < جہ کے لئے ما خیالی ہوگا سوائے لا = ا کے جبکہ یہ صفر ہوگا اس صورت میں نقطہ (عہ، ۰) اکیلا نقطہ ہے۔ ایسا خیال کیا جاسکتا ہے کہ صورت اول کے حلقہ کے معدوم ہوجانے سے یہ شکل پیدا ہوتی ہے۔

شکل (۶۹)

ان تمام صورتوں کی شکل (۶۹) میں توضیح کی گئی ہے۔ دائیں جانب سے شروع ہوکر نمونہ (۹) کا ایک منحنی ملتا ہے جو ایک اکیلی لا متناہی شاخ پر مشتمل ہے۔

۲۸۷

اسکے بعد وہ صورت جس میں لاتناہی شاخ ہے اور اسکے ساتھ اکیلا نقطہ (۱، ۰) لگا ہوا ہے، اس کی مساوات نمونہ (۱۱) کی ہے۔ اس ترتیب میں اگلی صورت یہ ہے لاتناہی شاخ اور نقطہ و کے گرد بیضوی حلقہ، یہ نمونہ (۸) کی مساوات ہے۔ اس سے بعد کی منزل میں بیضوی حلقہ اور لاتناہی شاخ مل گئے ہیں اور ملنے سے عقدہ مع ایک حلقہ کے پیدا کرتے ہیں، مماثل نمونہ کی مساوات (۱۰) ہے۔ آخیر میں ایک اکیلی شاخ ہے جو حلقہ کے باہر سے گزرتی ہے سا اس کے لئے پھر نمونہ (۹) کی مساوات ہے*۔

شکل (۷۰)

* شکل کے منحنی مساوات

$$ما^2 = \frac{1}{4}(لا^3 - 3\,لا^2 + ج)،$$

سے مرتسم کئے گئے ہیں، جبکہ ج = -۲، ۰، ۲، ۴، ۶ ⊙ - ان کا باہمی ربط آسانی سے ذہن میں آسکتا ہے اگر انہیں ایک سطح (دفعہ ۲۴۳) کے متواتر گھیرا خطوط خیال کیا جائے مثلاً یہ سطح پہاڑی دامن میں کسی چوٹی کے قریب و جوار کی منحنی سطح ہو سکتی ہے۔

⊙ Contour lines

(ع) نہایت ہی خاص صورت میں جبکہ تینوں مقداریں عا، با، جا منطبق ہو جائیں تو

لر ما² = (لا − عا)³ . . . . (۱۳)

اِس صورت میں منحنی "نیم کعبی مکافی" کہلاتا ہے۔ اسکے (عا، ۰) پر ایک قرن ہے۔ اسے عقدہ کی انتہائی شکل خیال کیا جا سکتا ہے جو حلقہ کے معدوم ہو جانے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ دیکھو شکل ۷۰ جہاں عا = ۰۔

اگر مساوات (۲) میں ف (لا) منطق ہو مگر صحیح نہ ہو تو نسب نما کی حقیقی اصلوں سے (اگر کوئی ہوں) متقارب ملیں گے جو محور ما کے متوازی ہونگے بشرطیکہ لا کی ایسی قیمتوں کے لئے جو ان اصلوں سے بہت کم متفاوت ہوں ما² مثبت ہو۔

۲۰۸ مثال ۳ — ما² / لر² = (لا − ار) / لا . . . . (۱۳)

محور ما متقارب ہے، نیز لا کی بڑی قیمتوں کے لئے ما = ± لر تقریباً، لا = ۰ اور لا = ار کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ حقیقی نہیں۔ دیکھو شکل ۷۱۔

و ۷

شکل (۷۱)

شکل (۷۲)

مثال ۴۔ $\frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}}$ .... (۱۴)

لا منفی کے لئے اور لا > ا کے لئے ما خیالی ہے۔ دیکھو شکل ۷۲۔
اس منحنی کو اگنیسی کی ڈائن (Witch of Agnesi) کہتے ہیں۔

مثال ۵۔ $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \, \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} - \text{لا}}$ .... (۱۵)

مبدا پر عقدہ ہے اور منحنی محور لا کو دوبارہ (-ا، ۰) پر کاٹتا ہے۔ اگر
لا > ب یا لا < -ا تو ما خیالی ہوتا ہے۔ خط لا = ب
متقارب ہے۔ دیکھو شکل ۷۳۔

مثال ۶۔ $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^3}{\text{ب} - \text{لا}}$ .... (۱۶)

یہ مساوات (۱۵) میں ا کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔
حلقہ اس صورت میں قرن ہو جاتا ہے شکل ۷۴۔ اس کو لبلابی خط
(Cissoid) کہا جائے گا۔

اشکال ۷۳ و ۷۴
اگلے صفحہ
پر
ہیں۔

شکل (۴)

شکل (۳)

شکل (۵)

مثال ۷ — $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \dfrac{\text{لا} + \text{ل}}{\text{لا} - \text{ل}}$ ....(۱۷)

چونکہ ما خیالی ہے جبکہ $\text{ل} > \text{لا} > -\text{ل}$ سوائے اس صورت کے جبکہ $\text{لا} = ۰$، مبدأ اکیلا نقطہ ہے۔ مائل متقارب دریافت کرنیکے لئے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \pm \left(\frac{\frac{\text{ل}}{\text{لا}} + ۱}{\frac{\text{ل}}{\text{لا}} - ۱} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(۱ + \frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ل}^2}{\text{لا}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \left(۱ + \frac{\text{ل}}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\frac{\text{ل}^2}{\text{لا}^2} + \cdots\cdots\right) \text{........ (۱۸)}$$

اس لئے خطوط $\text{ما} = \pm(\text{لا} + \text{ل})$ ....(۱۹)
متقارب ہیں۔ شکل ۵۷۔

۱۲۰ — ماورائی منحنی — زنجیرہ — خط بُسری (Tractrix)

اب چند مشہور منحنیات پر بحث کی جائے گی جو اکثر ماورائی ہیں اور جن کی تعریف اُس نمونہ کی مساواتوں سے کی جاتی ہے جن کا حوالہ دفعہ ۱۶ میں دیا گیا ہے یعنے

$$\text{لا} = \text{فا}(\text{ت})، \quad \text{ما} = \text{خا}(\text{ت})$$

جہاں ت بدلنے والا متبدل ہے۔

جو شکل ایک یکساں زنجیر جاذبہ ارض کے ماتحت آزادانہ طور پر لٹکنے سے اختیار کرتی ہے اسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہینگے۔

سکونیات کے ابتدائی اصولوں کی مدد سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ (ا) سے شروع ہو کر زنجیر پر کسی نقطہ ب تک کا قوسی طول س ہو اور ب پر کے ماس کا افق کے ساتھ میلان سا ہو تو

$$\text{س} = \text{ل مس سا} \text{ .... (۲)}$$

جہاں ل مستقل ہے۔ اس لئے اگر لا، ما افقی اور انتصابی محدد ہوں تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{جم سا} \times \text{ا قط}^2\text{سا} = \text{ا قط سا}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{جب سا} \times \text{ا قط}^2\text{سا} = \text{ا مس سا قط سا}$$

(۳) ....

تکمل کرنے سے　$\text{لا} = \text{ا لوک مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{سا}}{2}\right)$، $\text{ما} = \text{ا قط سا}$ ..... (۴)

مستقل حذف کر دینے سے یہ مراد ہے کہ مبدأ کو کسی خاص نقطہ پر لیا گیا ہے جس کا ابتک تعین نہیں کیا گیا تھا۔ چونکہ ضابطہ (۴) سے لا = ۰ اور ما = ا جبکہ سا = ۰۔ اس لئے ظاہر ہے کہ مبدأ نقطہ ا کے انتصاباً نیچے فاصلہ ا پر واقع ہے۔ (۴) سے کارٹیزی مساوات بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

شکل (۷۶)

$\frac{لا}{ر}$ = لوک مس $(\frac{\pi}{۴} + \frac{سا}{۲})$ = لوک (قط سا + مس سا)

جس سے قط سا + مس سا = قو $^{\frac{لا}{ر}}$

قط سا − مس سا = قو $^{-\frac{لا}{ر}}$ .... (۵)

اس لئے جمع اور تفریق سے

ما = ا قط سا = $\frac{ا}{۲}$ (قو $^{\frac{لا}{ر}}$ + قو $^{-\frac{لا}{ر}}$) = ا جمہ $\frac{لا}{ر}$

س = ا مس سا = $\frac{ا}{۲}$ (قو $^{\frac{لا}{ر}}$ − قو $^{-\frac{لا}{ر}}$) = ا جمز $\frac{لا}{ر}$ ...... (۶)

بعض اور خاصیتیں شکل سے بآسانی حاصل ہوتی ہیں۔ اگر پ ن معین ہو، پ ت مماس، پ گ عماد اور ن ے پایہ سے مماس پر معین تو

ن ے = ما جم سا = ا، پ ے = ا مس سا = س

چونکہ پ ے زنجیرہ کی قوس کے مساوی ہے، اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ے کا اگلا متصل مقام ے ن کے اندر ہے، دوسرے الفاظ میں ے ن ے کے طریق کا مماس ہے۔ اس لئے اس طریق یا منحنی کی خصوصیت یہ ہے کہ اس کا مماس ے ن مستقل ہوتا ہے۔ اس منحنی کو خط جرّی کہتے ہیں۔ اور وہ اسلئے کہ یہ ایک وزنی ذرہ کا راستہ یا لوکس ہے جسکو رسی کے ذریعہ ایک کھردرے افقی مستوی پر گھسیٹا جائے جبکہ اسی کا دوسرا سرا ن ایک خط مستقیم (۷۸) مرتسم کرے۔

شکل (۷۷)

۲۹۲

منحنی کے نقطہ ا پر ایک قرن ہے اور محور لا اس کا متقارب ہے۔

اس منحنی کی اور خاصیتیں اس کے مماس کے (طول میں) مستقل ہونے کی بناء پر حاصل ہو سکتی ہیں۔ مثلاً چونکہ اس کے دو متصل مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ صف سا بناتے ہیں اس لئے مماس جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس تکملہ

$\frac{1}{2}\int$ اُ فرصا سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اس طرح منحنی اور متقارب کے درمیان کا کل رقبہ $\frac{1}{2}\pi$ اُ کے مساوی ہے۔

۱۲۱ – لیسازو کے منحنی (Lissajous' Curves) – یہ منحنی علم آواز میں خاص اہمیت رکھتے ہیں اور دو سادہ موسیقی حرکتوں کے ترکیب دینے سے، جو علی القوائم سمتوں میں ہوں یہ منحنی پیدا ہوتے ہیں۔ انہیں اسطرح تعبیر کیا جا سکتا ہے

لا = ا جم (ن ت + سہ)، ما = ب جم (نَ ت + صَہ) ...(۱)

نیز یہ ظاہر ہے کہ مقداروں صہ، صَہ میں سے ایک کو کوئی مناسب قیمت دیدی جا سکتی ہے کیونکہ اس کے معنے یہ ہیں کہ وقت کے مبدأ کا خاص انتخاب کیا گیا ہے۔

جس صورت میں دور $\frac{2\pi}{ن}$، $\frac{2\pi}{نَ}$ متوافق ہوں تو ت کے اسقاط سے لا، ما میں جبریہ ربط ل سکتا ہے۔

مثال ۱ – جس صورت میں ن = نَ تو ہم لکھ سکتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جم ن ت ...... (۲)

جس سے $\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب}$ جم صہ = - جب ن ت جب صہ،

$\frac{ما}{ب}$ جب صہ = جم ن ت جب صہ

مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے ملتا ہے

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{2 لا ما}{ا ب} جم صہ + \frac{ما^2}{ب^2} = جب^2 صہ \quad \ldots\ldots (3)$$

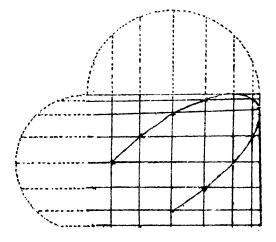
یہ قطع ناقص ہے۔ خاص صورت میں جبکہ صہ = ۰ یا صہ = π قطع ناقص بگڑ کر ایک خط مستقیم

$$\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

بن جاتا ہے۔

اگر دور ٹھیک طور پر مساوی نہ ہوں تو شکل مرتسمہ کو قطع ناقص خیال کیا جا سکتا ہے جو دو ترکیبی حرکتوں کی اضافی ہیئت صہ کے مسلسل بدلنے سے بتدریج اپنی شکل بدلتا ہے۔

۲۹۳

شکل (۷۸)

جب قطع ناقص (۲) کو اسکے صدری محوروں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے تو متحرک نقطہ کے محدد یہ شکل اختیار کرتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جب (ن ت + صہ) ...(۵)

ن ت + صہ کی تطبیق ہم "خروج المرکز زاویہ" کے ساتھ کرتے ہیں اور چونکہ ن ت + صہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) ایک ایسے نقطہ کے قائم ظل کی طرح حرکت کرتا ہے جو نیم قطر ا کا دائرہ مستقل رفتار ن ا کے ساتھ مرتسم کرے۔ چونکہ دائرہ سے ناقص میں بدلنے کے لئے کوئی لا متناہی چھوٹا قراشی نسبت سے بدلتا ہے جس نسبت سے کہ متوازی نیم قطر، اسلئے معلوم ہوتا ہے کہ ناقصی حرکت میں کسی نقطہ پ پر کی رفتار ن × ج د ہوگی جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے اور ج مرکز ہے۔

اس کو "ناقصی سوسیقیہ" کہتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر نَ = ۲ ن تو لکھو

لا = ا جم ن ت، ما = ب جم (۲ ن ت + صہ) ....(۶)

اس صورت میں ما اپنے دوریں سے دگنی تیز رفتار سے گزرتا ہے اور نقطہ (۰، ب جم صہ) دو مرتبہ عبور ہوتا ہے جبکہ ن ت بقدر ۲ π کے بڑھتا ہے۔ اسلئے منحنی بالعموم دو حلقوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

جبکہ صہ = ± π/۲ تو منحنی دونوں محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے اور جبری مساوات یہ ہوتی ہے

۲۹۴

ما²/ب² = ۴ (لا²/ا²) (۱ − لا²/ا²) ....(۷)

جب صہ = ۰ یا π تو منحنی گر کر مکافی کی ایک قوس بن جاتا ہے

ما/ب = ± (۲ لا²/ا² − ۱) ....(۸)

جب دوروں کا باہمی ربط بالکل ٹھیک نہیں ہوتا تو منحنی ان دو مکافی قوسوں کے درمیان بطور اتفاقی شکلوں کے اہتزاز کرتا ہے۔*

*شکل ۸ میں لیسا ژو کے منحنی بنانے کے طریقہ کی نشان دہی کی گئی ہے۔ اس میں انتصابی اور افقی خطوط ہیں جو مختلف مساوی دائروں کے مساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچے گئے ہیں اور ان سے وقت کے مساوی وقفے تعبیر ہوتے ہیں۔
ان منحنیات کو کھینچنے کی کئی مناظری اور حیلی ترکیبیں ہیں ان کے بیان اور انکے مختلف نمونوں کے متعلق تجربی علم آواز کی کتابوں کی طرف رجوع کیا جائے۔

۱۲۲ — خط تدویر — خط تدویر وہ منحنی ہے جو ایک دائرہ کے محیط پر کا کوئی نقطہ مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہو۔ ظاہر ہے کہ یہ منحنی بیشمار حصوں پر مشتمل ہوگا جو ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہونگے اور جن میں سے ہر ایک حصہ دائرہ کے ایک پورے دورہ کو تعبیر کریگا۔ شکل ذیل میں ا جیسے نقطے جہاں منحنی ثابت خط مستقیم یا قاعدہ ب د سے دور سے دور ہے راس کہلاتے ہیں، متواتر راسوں کے درمیان کے نقاط جیسے د جہاں منحنی قاعدہ سے ملتا ہے "قرن" (Cusp) کہلاتے ہیں، خط ا ب کو جو ایک راس ہیں سے گذرتا ہے اور قاعدہ پر عمود وار ہے منحنی کا محور کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط تشاکل کا محور ہے۔

شکل (۷۹)

محور ا ب کو قطر مان کر جو دائرہ بنایا جائے اسکو حوالہ کا دائرہ ماننا مناسب ہوگا۔ فرض کرو کہ لڑھکنے والے دائرہ کا کوئی اور مقام ہے پ ت ہے، قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس ہے ہے، مرکز ج ہے، ہے میں سے گذرنیوالے

قطر کا مقابل کا سرا ت ہے اور مرسم نقطہ کا مقام پ ہے۔ پ م ن کو قاعدہ کے متوازی کھینچو کہ یہ ت ا سے م پر، ا ب سے ن پر اور حوالہ کے دائرہ سے ق پر ملے۔ اگر ا ت اور ا ب کو بالترتیب لا اور ما کے محور مانا جائے تو پ کے محدد ہونگے

لا = ن پ = پ م + م پ، ما = ا ن = ج ت - ج م

فرض کرو کہ لڑھکنے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور طہ وہ زاویہ (پ ج ت) ہے جس میں سے یہ دائرہ گھومتا ہے جیسے مرسم نقطہ ا سے پ تک سفر کرتا ہے۔ اس طرح ب م = ا طہ، پ م = ا جب طہ، ج م = ا جم طہ اس لئے

لا = ا (طہ + جب طہ)، ما = ا (ا - جم طہ) ......(۱)

ان مساواتوں سے منحنی کے تمام خواص حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مماس کا میلان ا ت کے ساتھ یا عماد کا ب ا کے ساتھ سا ہو

تو مس سا = فرما / فرلا = (فرما / فرطہ) / (فرلا / فرطہ) = جب طہ / (ا + جم طہ) = مس طہ/۲

جس سے سا = طہ/۲ ....(۲)

چونکہ زاویہ ت م پ نصف ہے زاویہ ت ج پ کا اس لئے م پ منحنی کے نقطہ پ پر عماد ہے اور پ ت مماس۔ مقابلہ کرو دفعہ ۶۴ ا کے ساتھ، دیکھے۔

منحنی کی قوس (س) معلوم کرنے کے لئے

(فرلا / فرطہ)² + (فرما / فرطہ)² = ا² [(ا + جم طہ)² + جب² طہ] = ۴ا² جم² طہ/۲

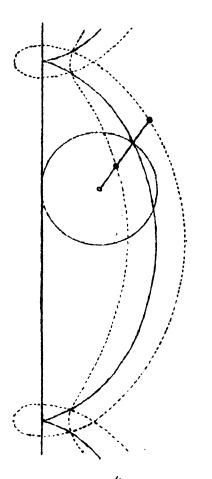
اس لئے دفعہ ۱۱۱ کی مدد سے س = ∫ ۲ا جم طہ/۲ فرطہ = ۴ا جب طہ/۲

یا سا کی رقوم میں　　س = ۴ ا جب سا .... (۳)
کوئی مستقل جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر س کا مبدأ ا پر لیا جائے۔
علم حرکت میں یہ رشتہ ضروری ہے۔
چونکہ　ت پ = ت ے جب سا اس لئے
قوس　ا پ = ۲ ت پ = ۲ وتر ا ق .... (۴)
بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک قوس کا طول ۸ ا ہے۔
اگر رکھا جائے　ماءَ ے م = ا (۱ + جم طہ) .... (۵)
تو منحنی اور قاعدہ کے درمیان رقبہ

$$= \int ما \, فرلا = ا^۲ \int (۱ + جم طہ)^۲ فرطہ = ۴ا^۲ \int جم^۴ \frac{طہ}{۲} فرطہ$$

$$= ۸ ا^۲ \int جم^۴ سا \, فرسا$$

اِس تکملہ کو حدود $\pm \frac{\pi}{۲}$ کے درمیان لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رقبہ جو قاعدہ اور منحنی کے ایک محراب کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ مکون دائرہ کے رقبہ کا تین گنا ہے۔　　۲۹۶

اگر ایک دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑکے تو کوئی نقطہ جو بلحاظ دائرہ کے ثابت ہو اثناء حرکت میں ایک منحنی طے کریگا جسے ہم استداری خط یا محض استداری (Trochoid) کہینگے۔

شکل (۸۰)

شکل ۷۹ میں اگر مرسم نقطہ نیم قطر ج پ کے اندر مرکز سے فاصلہ ک پر ہو تو اس کے محدد ہونگے

لا = ا طہ + ک جب طہ، ما = ا - ک جم طہ .... (۶)

۲۹۷ جب ک > ا تو حلقے پیدا ہوتے ہیں جو (ک = ا) کی خاص صورت میں بگڑ کر قرن ہو جاتے ہیں۔ جب ک < ا تو منحنی قاعدہ سے نہیں ملتا

شکل ۸۰ میں صورتیں ک = $\frac{۱}{۲}$ ل، ک = ل، ک = $\frac{۳}{۲}$ ل دکھائی گئی ہیں۔

(۶) سے یہ بآسانی ثابت ہوتا ہے کہ استداری کے کسی نقطہ پ کا عماد لڑھکنے والے دائرہ کے نقطہ تماس کے متناظر محل میں سے گذرتا ہے مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

۲۲۳ا۔ بر تدویر اور در تدویر۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک دائرہ لڑھکتا ہے موخرالذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ اثنائے حرکت میں جو طریق مرتسم کرتا ہے اسے ہم بر تدویر (Epicycloid) کہینگے اگر متحرک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر واقع ہو اور در تدویر (Hypocycloid) کہینگے اگر یہ اندر واقع ہو*۔ جن بر تدویروں میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ سے پورا گرد آجاتا ہے انہیں امتیاز کی خاطر گیر تدویر (Pericycloid) کہا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ثابت دائرہ کا مرکز و ہے اور لڑھکنے والے دائرہ کا مرکز کسی مقام میں ج ہے، نقطہ تماس ے ہے اور مرتسم نقطہ پ ہے۔ نیز فرض کرو کہ قطر پ ج پَ کا دوسرا سرا پَ ابتدا میں نقطہ ا پر تھا۔ ہم سیاری صورت وہ لینگے جس میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہے۔ فرض کرو کہ

و ا = ل، ج پ = ب، ∠ ے و ا = ط، ∠ ے ج پ = فا

شکل (۸۱)

* پراکٹر (Proctor) نے اپنی کتاب تدویر کا رسالہ Treatise on the cycloid, etc. (1876). میں تدویر کی اس بہتر تعریف کو اختیار کیا۔

ج ع پ کا میلان و ا کے ساتھ طہ + فہ ہے اگر د کو محوروں کا مبدأ اور و ا کو محور لا مانا جائے تو قائم ظل سے پ کے محدد حاصل ہوتے ہیں

لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم (طہ + فہ)
ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب (طہ + فہ) ......(۱)

یا چونکہ ا طہ = قوس ا ے = قوس پ ے = ب فہ ......(۲)

لا = (ا + ب) جم طہ + ب جم $\frac{ا + ب}{ب}$ طہ
ما = (ا + ب) جب طہ + ب جب $\frac{ا + ب}{ب}$ طہ ......(۳)

۲۹۸

نقطہ پ جس بر تدویر کو مرتسم کرتا ہے وہ دوسری رقموں کے سر و ن میں ب کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

لا = (ا + ب) جم طہ - ب جم $\frac{ا + ب}{ب}$ طہ
ما = (ا + ب) جب طہ - ب جب $\frac{ا + ب}{ب}$ طہ ......(۴)

نقطہ ا پر اس کا ایک قرن ہے۔

اوپر کی مستند صورت میں دائرے ے پر کے مماس کے مقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔ اگر یہ ایک ہی طرف واقع ہوں جیسا کہ گرد تدویر اور در تدویر کی صورت میں تو فقط ب کی علامت کو تمام ضابطہ میں بدل دینا چاہئے۔ اس طرح (۲) کے مماثل ضابطہ ملتا ہے

لا = (ا - ب) جم طہ - ب جم $\frac{ا - ب}{ب}$ طہ
ما = (ا - ب) جب طہ + ب جب $\frac{ا - ب}{ب}$ طہ ......(۵)

اسکی تصدیق طالب علم خود کرے۔ دیکھو شکل ۸۲۔ در تدویر میں

$\text{ا} > \text{ب}$ اور گرد تدویر میں $\text{ا} < \text{ب}$

شکل (۸۲)

۲۹۹

اسی طرح پ کے طریق کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned}\text{لا} &= (\text{ا} - \text{ب})\,\text{جم}\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}\,\text{طہ}\\ \text{ما} &= (\text{ا} - \text{ب})\,\text{جب}\,\text{طہ} - \text{ب}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}}\,\text{طہ}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۶)$$

بر تدویر کے کسی نقطہ پر مماس معلوم کرنیکے لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے [چونکہ $\frac{\text{فہ}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$]

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{جم}\,\text{طہ} + \text{جم}\,(\text{طہ} + \text{فہ})}{\text{جب}\,\text{طہ} + \text{جب}\,(\text{طہ} + \text{فہ})} = -\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{فہ}}{۲}\right) \ldots\ldots (۷)$$

شکل ۸۱ کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ $\text{طہ} + \frac{\text{فہ}}{۲}$، ے پ کا میلان ہے و ا کے ساتھ۔ اِس لئے ے پ بر تدویر کا پ پر عماد ہے۔ اسی طرح کا نتیجہ گرد تدویر اور در تدویر کے لئے مساواتوں (۵) سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

نیز (۱) سے

$$\left(\frac{فرلا}{فرفہ}\right)^2 + \left(\frac{فرما}{فرفہ}\right)^2 = \frac{(ا+ب)^2 ب^2}{ا^2} (۲ + ۲ جم فہ) = \frac{۴ (ا+ب)^2 ب^2}{ا^2} جم^2 \frac{فہ}{۲}$$

یا
$$\frac{فرس}{فرفہ} = \frac{۲ (ا+ب) ب}{ا} جم \frac{فہ}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

$$پس \quad س = \frac{۴ (ا+ب) ب}{ا} جب \frac{فہ}{۲} \quad \ldots\ldots (۹)$$

کسی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں اگر س = ۰ جبکہ فہ = ۰

اگر عماد سے پ کا میلان و ا کے ساتھ سا ہو تو

$$سا = طہ + \frac{فہ}{۲} = \frac{ا + ۲ب}{۲ ا} فہ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

$$اِس لئے \quad س = \frac{۴ (ا+ب) ب}{ا} جب \frac{ا}{ا + ۲ب} سا \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

ضابطہ (۹) کی ایک سادہ تعبیر ہے شکل ۸۱ سے معلوم ہوتا ہے کہ

ت پ = ۲ ب جب $\frac{فہ}{۲}$ جس سے

$$س = ۲ \frac{ا+ب}{ا} \times وتر ت پ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$ *

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک منحنی کا طول $\frac{۸ (ا+ب) ب}{ا}$ ہے۔

گرد تدویرا اور در تدویر کے متعلق متناظر نتائج ب کی علامت بدلنے سے بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۲۰۰ جو منحنی لڑکنے والے دائرہ کا کوئی ایسا نقطہ مرتسم کریگا جو محیط پر واقع نہیں ہوتا اسے بالترتیب براستداری (Epitrochoid) یا دراستداری (Hypotrochoid)

* نیوٹن کا (Principia, lib. i) مسئلہ ۴۹ -

خط کہا جائیگا بموجب اسکے کہ نقطہ باہر ہو یا اندر۔ اگر مرتسم نقطہ کا فاصلہ لڑکنے والے دائرہ کے مرکز سے ک ہو تو مختلف صورتوں میں محددوں لا، ما کے لئے جملے دوسری رقوم کے (صرف) سروں میں ب کی بجائے ک لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۴ ۔ خاص صورتیں ۔ (۱) اگر ثابت دائرہ کا نیم قطر لا انتہا بڑا ہو تو دالیس تدویر کی صورت پر ہم آجاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۳ (۱) سے متناظر مساواتیں بآسانی حاصل ہوتی ہیں اگر ا کی بجائے لا + ا اور ا طہ = ب فہ اور (آخر الامر) طہ = ۰ لکھا جائے۔

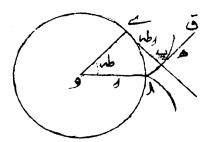
(۲) اس کے بعد لڑکنے والے دائرہ کے نیم قطر کو لا انتہا بڑا بنانے سے ایک ایسے خط مستقیم کے کسی نقطہ کا طریق ملتا ہے جو ایک ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے اس تعریف کے مطابق جو منحنی ملتا ہے اسے ہم دائرہ کا پیچیدہ (Involute) کہینگے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۴۔ اسکی مساواتیں دفعہ ۱۲۳ (۴) کی انتہائی صورت کے طور پر معلوم ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ شکل سے فوراً لکھی جا سکتی ہیں۔

شکل (۸۳)

ہمیں شکل سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ا جم طہ} + \text{ا طہ جب طہ} \\ \text{ما} &= \text{ا جب طہ} - \text{ا طہ جم طہ} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

اس کے متناظر استداری منحنی ہے

$$\left.\begin{array}{l} \text{لا} = (1+\text{ھ}) \text{ جم طہ} + 1\text{طہ جب طہ} \\ \text{ما} = (1+\text{ھ}) \text{ جب طہ} + 1\text{طہ جم طہ} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں شکل میں ھ = پ ق اور ق مرسم نقطہ ہے۔ خاص صورت ھ = -۱ سے "ارشمیدس کا لولب" حاصل ہوتا ہے، دیکھو دفعہ ۱۲۶۔

(۳) اگر نیم قطر ا، ب متوافق ہوں تو گردشوں کی کسی پوری تعداد کے بعد مرسم نقطہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آئیگا اور اس کے بعد اس کا راستہ اس کے پرانے طریق پر منطبق ہوگا۔ ایسی صورت میں منحنی جبریہ ہوتا ہے کیونکہ لا، ما کے لئے جو جملے حاصل ہوتے ہیں ان سے مثلثی تفاعل ساقط ہو سکتے ہیں۔ بعض صورتوں میں مساوات کی قطبی شکل زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

۳۰۱

شکل (۸۵)　　شکل (۸۴)

شکل (۸۶)

اشکال ۸۴، ۸۵، ۸۶ میں "مبر" اور "مدور" تدویریں دکھائی گئی ہیں جن میں لڑکنے والے

دائرہ کا نیم قطر ثابت دائرہ کے نیم قطر کے ساتھ بالترتیب نسبت ۱، ½، ⅓ رکھتا ہے۔ ایک دو صورتیں خاص طور پر مشہور خاصیتیں رکھتی ہیں، ان کا ہم تفصیلی معائنہ کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ خط صنوبری (Cardioid)۔

اگر دفعہ ۱۲۳ (۳) میں ب = ا رکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

لا = ۲ ا جم طہ + ا جم ۲ طہ، ما = ۲ ا جب طہ + ا جب ۲ طہ

جس سے لا + ا = ۲ ا (۱ + جم طہ) جم طہ، ما = ۲ ا (۱ + جم طہ) جب طہ ...... (۳)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (-ا، ۰) کو قطب مان کر جو سمتی نیم قطر کھینچا جائے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ر = ۲ ا (۱ + جم طہ) .... (۴)

یہ اور طرح سے بھی شکل ۸۷ سے ظاہر ہے جہاں

اَپ = ۲ اَن = ۲ (وے + اَم)

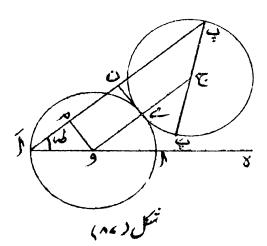
شکل (۸۷)

متناظر استداری خط ان مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

لا = ۲ ا جم طہ + ک جم ۲ طہ، ما = ۲ ا جب طہ + ک جب ۲ طہ

۴۰۲

نقطہ (ر-ک، ۰) کو قطب ماننے سے یہ ضابطے اِس مساوات کے معادل ہیں

ر = ۲ (ا + ک جم طہ) ....(۵)

جو گھونگا منحنی (Limaçon) کی قطبی مساوات ہے (دفعہ ۱۲۷) - یہ مساوات بھی بآسانی ہندسی طریق پر حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۲- ایک دائرہ اپنے سے دُگنے نصف قطر والے دائرہ کے اندر لڑھکتا ہے۔
۱۲۳ (۶) میں رکھو ب = $\frac{1}{2}$ ا تو حاصل ہوگا

لا = ا جم طہ، ما = ۰ ....(۶)

یعنی لڑھکنے والے دائرہ کے محیط پر کا مرسم نقطہ ثابت دائرہ کا ایک قطر مرتسم کرتا ہے۔
نیز متناظر استداری منحنی ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = (ب + ک) جم طہ، ما = (ب - ک) جب طہ .....(۷)

اور یہ قطع ناقص ہے جس کے نیم محور ب ± ک ہیں۔ نیز اگر لڑھکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہوگی۔

ہندسی تخیلات کی بناء پر بھی یہ نتائج بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ لڑھکنے والا دائرہ ہمیشہ ثابت دائرہ کے مرکز و میں سے گذرتا ہے اور اگر لڑھکنے والے دائرہ کا نقطہ پ ابتداء میں نقطہ ا پر منطبق ہو تو قوس سے پ = قوس سے ا - اب چونکہ نصف قطروں کی باہمی نسبت ۱ : ۲ ہے، اس لئے قوس سے پ کے سامنے اس کے محیط پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہونا چاہئے جو قوس سے ا کے سامنے اسکے اپنے دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ وپ اور وا سمت میں منطبق ہوتے ہیں اور پ ثابت قطر وا کو مرتسم کرتا ہے۔ نیز چونکہ زاویہ پ وپَ زاویہ قائمہ ہے اس لئے لڑھکنے والے دائرہ کے قطر پ پَ کا دوسرا سرا ثابت دائرہ کا وہ قطر مرتسم کرتا ہے جو وا پر علی القوائم ہے۔ اس لئے پ پَ مستقل
۴۰۳
طول کا ایک خط مستقیم ہے جس کے سرے دو علی القوائم خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ ان حالات کے ماتحت پ پَ پر کا کوئی اور نقطہ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۴۵ امثال ا کے ساتھ۔

شکل (۸۸)

مثال ۳۔ ایک دائرہ ایک ایسے ثابت دائرہ کے باہر لڑکتا ہے جس کا نیم قطر اسکے نیم قطر کا نصف ہے، نیز لڑکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کو پورا گھیر لیتا ہے۔

دفعہ ۱۲۳ کے ضابطوں (۵) سے حاصل ہوتا ہے جبکہ ب = ۲ا

$$\text{لا} = -\text{ا جم طہ} - ۲\text{ا جم}\frac{\text{طہ}}{۲}،\quad \text{ما} = -\text{ا جب طہ} - ۲\text{ا جب}\frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} - \text{ا} = -۲\text{ا}\left(۱ + \text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}\right)\text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}،\quad \text{ما} = -۲\text{ا}\left(۱ + \text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۲} \quad ......(۸)$$

اگر ہم رکھیں $\text{طہَ} = \frac{\text{طہ}}{۲} + \pi$ تو ظاہر ہے کہ گرِد تدویر کی مساوات حسب ذیل ہوگی جبکہ اس کا قطب (ا، ۰) لیا جائے

$$\text{ر} = ۲\text{ا}\,(۱ - \text{جم طہَ}) \quad ....\ (۹)$$

اور یہ خط صنوبری ہے۔

اس نتیجہ میں اور اوپر کی مثال ا کے نتیجہ میں تعلق دفعہ ۱۵۰ سے معلوم ہوگا۔

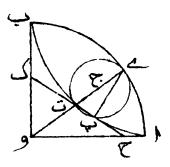
مثال ۴۔ "چار قرنوں والا در تدویر"۔

دفعہ ۱۲۳ (۶) میں رکھو $\text{ب} = \frac{\text{ا}}{۴}$ تو حاصل ہوتا ہے

لا = ۳/۴ ا جم طہ + ۱/۴ ا جم ۳ طہ = ا جم³ طہ
ما = ۳/۴ ا جب طہ - ۱/۴ ا جب ۳ طہ = ا جب³ طہ .... (۱۰)

جس سے منحنی بآسانی مرتسم ہو سکتا ہے۔ اسکی کارٹیزی صورت یہ ہے

لا^(۲/۳) + ما^(۲/۳) = ا^(۲/۳) .... (۱۱)

بعض اوقات اس منحنی کو "ستارہ نما" کہا جاتا ہے، اس کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ اسکے مماس کا طول جو محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہوتا ہے۔ اگر شکل ۸۹ میں مرسم نقطہ پ ہو اور ت پ مماس ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جائیگا کہ زاویہ ح ت پ زاویہ ا و ح کا دوچند ہے، اس لئے ح ک = ۲ و ت = ا
نیز دیکھو شکل ۱۲۵ دفعہ ۱۴۵۔ ۳۰۴

شکل (۸۹)

۱۲۵ - دائری حرکتوں کا ایکدوسرے پر انطباق - بر دورے

تدویری اور استداری منحنی جنکا ذکر دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴ میں کیا گیا ہے ایک اور طرح سے بھی پیدا ہوتے ہیں، یہ ایسے نقطوں کے طریق ہیں جنکی حرکت دو یکساں دائری حرکتوں سے مرکب ہو۔

ایک بازو و ق ایک ثابت نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار
ن کے ساتھ حرکت کرتا ہے مبدأ و میں سے گذرنیوالے قائم محددوں پر
اس کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت ، ما = ج جب ن ت .... (۱)

جہاں ج = و ق بشرطیکہ ت کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے
اگر ایک اور بازو و قَ نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار نَ کے ساتھ
گردش کرے اور ایک ہی وقت میں و ق کے ساتھ ابتدأ محور لا سے
گھومنا شروع کرے تو محوروں پر و قَ کے ظل ہونگے

لا = جَ جم نَ ت ، ما = جَ جب نَ ت .... (۲)

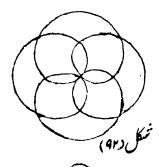
جہاں و قَ = جَ۔ اگر متوازی الاضلاع و ق پ قَ کی تکمیل کیجائے
تو و پ سے و ق اور و قَ کا ہندسی مجموعہ تعبیر ہوگا اور پ کے محدد
ہونگے

لا = ج جم ن ت + جَ جم نَ ت ، ما = ج جب ن ت + جَ جب نَ ت*
.... (۳)

چونکہ ق پ ہمیشہ و قَ کے مساوی اور متوازی رہتا ہے اس لئے
پ کا راستہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو بلحاظ ایک نقطہ ق کے دائری
مدار مرتسم کرتا ہے جبکہ ق خود نقطہ و کے گرد یکساں طور پر دائرے میں
حرکت کرتا ہے۔

---

* اگر متوازی الاضلاع و ق پ قَ چار ڈنڈوں کو چولوں کے ذریعہ وصل کرنے سے
بنایا گیا ہو اور اگر و ق، و قَ کو و کے گرد مناسب شرح سے گھمایا جائے تو
و میں سے گذرنے والے کسی ثابت خط سے پ کا فاصلہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کو
تعبیر کریگا جنکے دور $\frac{2\pi}{ن}$، $\frac{2\pi}{نَ}$ ہونگے۔ لارڈ کیلون کی موج گھڑی (Tidal clock) کا یہی اصول
ہے اسکی مدد سے عملی طور پر شمسی اور قمری جوار بھاٹا کا انطباق ایک دوسرے پر عمل میں آتا ہے۔

۳۰۵ اِس طور پر جو منحنی مرتسم کئے جاتے ہیں انہیں بر دورے (Epicycles) کہتے ہیں۔ اگر زاوی رفتاروں ن، نَ کی ایک ہی علامت ہو تو یہ بر دورے "راست" کہلاتے ہیں اور اگر علامتیں مختلف ہوں تو "الٹے" یا "رجعی"۔

قَ پ ق و

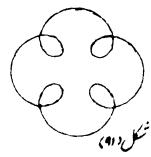
شکل (۹۰)

شکل (۹۱)

شکل (۹۲)

شکل (۹۳)

شکل (۹۴)

۲۰۶

اشکال ۹۱ تا ۹۴ میں سیدھے اور الٹے بردوریوں کے چند نمونے دکھائے گئے ہیں*
بالکل اسی طرح سے پ کے راستہ کی یہ تعریف ہو سکتی ہے، یہ ایک نقطہ کا طریق ہے جو نقطہ ق کے لحاظ سے دائری مدار میں حرکت کرتا ہے جبکہ خود نقطہ ق، و کے گرد یکساں دائری حرکت رکھتا ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ہر بردوریہ کی دو جداگانہ طریقوں سے تکوین ہو سکتی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ ہر بر، اور درتدویر اور (زیادہ عام طور پر) ہر براور دراستدارئہ سب کے سب بردورے ہیں کیونکہ اگر لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار یکساں ہو تو اس کا مرکز ج، ثابت دائرہ کے مرکز و کے گرد یکساں طور پر ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جبکہ نیم قطر ج پ جس کے اندر مرتسم نقطہ پ واقع ہے ج کے گرد یکساں گھماؤ رکھتا ہے۔ دیکھو اشکال ۸۱-۸۲۔

بخلاف اس کے ہر ایک بردوریہ یا براستداریہ ہے یا دراستداریہ اور بالخصوص ہر ایک سیدھا بردوریہ براستداریہ ہے اور ہر الٹا بردوریہ دراستداریہ ہے۔ اس امر کو ہم اوپر کی مساوات (۳) کا دفعہ ۱۲۳ کے نتائج کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دیکھ سکتے ہیں۔ آگے (دفعہ ۱۵۰) میں "فوری مرکز" کے نظریہ کی ضمن میں اس امر کا ایک سادہ ہندسی ثبوت دیا جائیگا۔

اشکال ۹۱ تا ۹۴ کے سیدھے اور الٹے بردوریوں کا تعلق چار قرنوں والی براور درتدویروں کے ساتھ واضح ہوگا۔

قدیم ہیئت میں بردورے کثرت سے استعمال ہوئے۔ اگر سیاروں کے مداروں کے خروج المرکز اور میلان نظر انداز کر دئے جائیں تو سورج زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا خیال کیا جا سکتا ہے اور کوئی اور سیارہ اسی مستوی سطح میں

---

* ایسی مختلف شکلیں بے شمار ہو سکتی ہیں، بردورے عملی طور پر ایک لاٹھی کے ذریعہ آسانی سے مرتسم ہو سکتے ہیں، کئی دلچسپ شکلیں جو اس طور پر حاصل کی گئی ہیں پرائکٹر کے رسالہ میں جس کا قبل حوالہ دیا گیا ہے دکھائی گئی ہیں، رسالہ کا صفحہ ۲۹۷ دیکھو۔

سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے، اس لئے بلحاظ زمین کے سیارہ کا مدار ایک بردوریہ ہے۔ بطلیموس کے وقت سے سولھویں صدی عیسوی تک اس امر کے متعلق یہی نظریہ قابل قبول رہا۔ اس کے بعد اس مظہر کے متعلق کاپرنیکی کی سادہ تشریح اور توجیہ تدریج غالب آ گئی۔

سیاروں کے اضافی مداروں میں حلقے ہیں (شکل ۹۱) جو "ساکن یا اچل نقاط" اور "رجعی حرکتوں" کا باعث ہوتے ہیں۔ دراصل یہی نقاط اور الٹی حرکتیں بطلیموس کے ہاتھوں بردوریوں کی ایجاد کا باعث ہوئیں۔

برعکس اس کے بلحاظ سورج کے جو چاند کا مدار ہے اس میں حلقے نہیں ہیں اگرچہ یہ بردوریہ ہے، علاوہ اس کے ہر مقام پر چاند کا مدار اندر کی طرف مقعر ہے۔

مثال ۱ ـ اگر ترکیبی دائری حرکتوں کی زاوی رفتاریں مساوی اور مختلف العلامت (نَ = -ن) ہوں تو لا = (ج + جَ) جم ن ت، ما = (ج - جَ) جب ن ت

.... (۴)

یعنی محصل حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ خاص صورت میں جبکہ جَ = ج، ناقص بگڑ کر خط مستقیم رہ جاتا ہے۔

یہ مثال طبیعی علم مناظر میں اہمیت رکھتی ہے۔

مثال ۲ ـ بردوریہ جو خاص صورت اختیار کرتا ہے جبکہ جَ = ج قابل توجہ ہے مساواتیں (۳) ہو جاتی ہیں

لا = ۲ج جم ((ن + نَ)/۲) ت جم ((ن - نَ)/۲) ت

ما = ۲ج جب ((ن + نَ)/۲) ت جم ((ن - نَ)/۲) ت ...... (۵)

یا لا = رجم طہ، ما = رجب طہ .... (۶)

جہاں طہ = ((ن + نَ)/۲) ت، ر = ۲ج جم ((ن - نَ)/(ن + نَ)) طہ ...... (۷)

اس لئے منحنی کی قطبی مساوات اس شکل کی ہے

ر = اجم م طہ .... (۸)

جس میں اگر م < ا تو بردور یہ راست ہے اور اگر م > ا تو یہ الثا یا رجعی ہے

دفعہ ۱۲۵ کی شکلوں ۹۲، ۹۴ میں بالترتیب م = $\frac{۱}{۳}$، م = ۲

۱۲۶ - قطبی محددوں کے لحاظ سے منحنی - لولبی خطوط -

کئی دلچسپ منحنی ہیں جن کی مساواتیں قطبی محددوں میں زیادہ موزوں طور پر بیان ہوسکتی ہیں پہلے ہم "لولبوں" (Spirals) کو لینگے -

(آ) "مساوی الزاویہ لولبی" یہ خاصیت رکھتا ہے کہ منحنی، ہر نقطہ پر سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے - اگر اس زاویہ کو عہ سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۶۳ کی رو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرطہ}} = \text{ر مم عہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

اس کا حل ہے (دفعہ ۳۸)

$$\text{ر} = \text{ا و}^{\text{طہ مم عہ}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

شکل (۹۵)

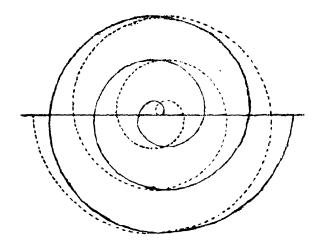
جیسے طہ، -∞ سے +∞ تک بدلتا ہے ر، صفر سے ∞ تک بدلتا ہے

شکل ۹۵ ۔ چونکہ دفعہ ۱۱۲ کی رو سے $\frac{فر ر}{فر س}$ = جم عہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی کا طول نیم قطروں ل، لہ کے درمیان ہے ۳۰۸

$$\int_{ل_1}^{ل_2} \frac{فرس}{فرر} \, فرر = (ل_2 - ل_1) \text{ قط عہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۲) "ارشمیدس کا لولب" ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے جبکہ یہ خط مستقیم خود اپنے ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔

علامات میں ر = ع ت، طہ = ن ت جس سے

ر = ا طہ ...... (۴) اگر ا = ع/ن ۔

شکل (۹۶)

شکل ۹۶ میں منحنی دکھایا گیا ہے، نقطہ دار شاخ طہ کی منفی قیمتوں کے جواب میں ہے ۔ اس منحنی کی تکوین کا ایک اور طریقہ دفعہ ۱۲۴ میں بیان کیا گیا ہے۔

(۳) سکانی لولب" کی تعیین اس مساوات سے ہوتی ہے

$$ر = \frac{۱}{طہ} \quad .... (۵)$$

اگر ما معین ہو جو ابتدائی خط پر کھینچا گیا ہے تو

$$ما = رجب طہ = ا \frac{جب طہ}{طہ}$$

جیسے طہ صفر کے قریب پہنچتا ہے ر لامتناہی ہوجاتا ہے مگر ما محدود انتہا ا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اسلئے خط ما = ا متقارب ہے۔
شکل ۹۷ میں نقطہ دار منحنی طہ کی منفی قیمتوں سے متعلق ہے۔

۳۰۹

شکل (۹۷)

۱۲۷ - گھونگا منحنی (Limaçon) اور خط صنوبری -

قطر ا پر ایک ثابت دائرہ بنایا گیا ہے جس کے محیط پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے، اگر و میں سے گذرنے والے قطر کو ابتدائی خط لیا جائے تو محیط پر کے کسی نقطہ ق کا سمتی نیم قطر ہے

$$ر = ا جم طہ \quad .... (۱)$$

شکل (۹۸)

۲۱۰ اگر اس نیم قطر پر ق سے مساوی مستقل فاصلوں ج پر دو نقاط پ، پَ لئے جائیں تو اِن نقطوں کا طریق گھونگا منحنی کہلائیگا۔ اس کی مساوات ہوگی

ر = ا جم طہ + ج . . . . (۲)

اِس میں ہر دو نقاط پ اور پَ کے راستے شامل ہیں جبکہ طہ، صفر سے ۲π تک بدلتا ہے۔ اگر ج < ا تو منحنی و میں سے گزرتا ہے جبکہ طہ = جم$^{-1}$ (− ج/ا) اور اس صورت میں حلقہ پیدا ہوتا ہے شکل ۹۸ میں پ۱ اور پَ۱ سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دیکھو۔ اگر ج > ا تو ر صفر نہیں ہوسکتا، پ۳، پَ۳ کا مرتسمہ منحنی شکل میں دیکھو۔

اس خاص صورت میں جبکہ ج = ا حلقہ بگڑ کر قرن بن جاتا ہے، اس صورت میں طریق

"قلب کی شکل کا" یا صنوبری شکل کا منحنی بن جاتا ہے، اس کی مساوات ہے

ر = ا (۱ + جم طہ) .... (۳)

شکل میں پ، پ، سے مرتسم شدہ منحنی دکھو۔ نیز دیکھو شکل ۸۴ دفعہ ۱۲۴۔

۱۲۸۔ منحنی رن = ان جم ن طہ۔ کئی مشہور منحنی اس نمونہ کے اندر شامل ہوتے ہیں

رن = ان جم ن طہ .... (۱)

ن کی مساوی مگر مختلف العلامت قیمتوں کے لئے جو منحنی پیدا ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۳۰۔

مثلاً اگر ن = ± ۱ تو دائرہ ر = ا جم طہ .... (۲)

اور خط مستقیم ر جم طہ = ا .... (۳)

حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ن = ± ۲ تو برنولی کا چشمہ منحنی* ر۲ = ا۲ جم ۲ طہ ...(۴)

اور قائم زائد ر۲ جم ۲ طہ = ا۲ .... (۵)

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۴) سے ر کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں طہ کی ان قیمتوں کے لئے جو ± $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان ہیں اور خیالی قیمتیں ملتی ہیں ان قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$ کے درمیان ہیں وغیرہ وغیرہ۔ نیز ر۲ اعظم ہے طہ = ۰ اور طہ = π کے لئے وغیرہ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ چشمہ منحنی دو حلقوں پر مشتمل ہے اور مبدا پر اس کا ایک عقدہ ہے۔

اگر ن = ± $\frac{1}{2}$ تو خط صنوبری ر$^{\frac{1}{2}}$ = ا$^{\frac{1}{2}}$ جم $\frac{طہ}{2}$ یا ر = $\frac{ا}{2}$ (۱ + جم طہ) ...(۶)

اور مکافی ر$^{\frac{1}{2}}$ جم $\frac{طہ}{2}$ = ا$^{\frac{1}{2}}$ یا ر = $\frac{2ا}{1 + جم طہ}$ .... (۷)

* Lemniscate.

بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔

۳۱۱ اگر (۱) کا لوکارثمی تفرق لیا جائے اور مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مم فہ} = \frac{1}{ر} \frac{\text{فر} ر}{\text{فر} طہ} = \text{ہس ن طہ} \quad ......(۸)$$

$$\text{یا} \quad \text{فہ} = \frac{\pi}{۲} + \text{ن طہ} \quad ....(۹)$$

طالب علم اوپر کی مختلف صورتوں میں اس نتیجہ کے مفہوم کا معائنہ کرے۔

۱۲۹۔ مماسی قطبی مساوات۔ اگر کسی منحنی کے کسی مماس پر عمود ع کھینچا جائے اور نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ر ہو تو بالعموم ع، ر کا تفاعل ہوگا۔ جو مساوات اس تعلق کو بیان کرتی ہے اسے ہم منحنی کی "مماسی قطبی" مساوات کہینگے۔

اگر معمولی قطبی مساوات معلوم ہو تو مماسی قطبی مساوات اِن ضابطوں

$$ع = ر \text{جب فہ}، \quad \frac{1}{ر} \frac{\text{فر} ر}{\text{فر} طہ} = \text{مم فہ} \quad ......(۱)$$

اور منحنی کی دی ہوئی مساوات سے طہ، فہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی (ضابطوں (۱) کے متعلق دیکھو دفعہ ۶۳)۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{ع^۲} = \frac{1}{ر^۲}(۱ + \text{مم}^۲ \text{فہ}) = \frac{1}{ر^۲} + \frac{1}{ر^۴}\left(\frac{\text{فر} ر}{\text{فر} طہ}\right)^۲ \quad ...(۲)$$

بعض اوقات سمتی نیم قطر کی بجائے اس کے مکافی یا الٹ کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ اگر لکھا جائے

$$ء = \frac{1}{ر} \quad \text{تو} \quad \frac{\text{فر} ء}{\text{فر} طہ} = -\frac{1}{ر^۲} \frac{\text{فر} ر}{\text{فر} طہ} \quad ....(۳)$$

اور ضابطہ (۲) ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{ع^{2}} = ع^{2} + \left(\frac{فرع}{فرطہ}\right)^{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

حرکیات میں استعمال کرنے کے نقطہ نظر سے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر منحنی کی ماسی قطبی مساوات دی گئی ہو مثلاً

$$ع = ف(ر) \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

تو منحنی قابل تعیین ہے سوائے بلحاظ تشریق کے کیونکہ

$$ر\frac{فرطہ}{فرر} = مس\ فہ = \frac{ع}{\sqrt{ر^{2} - ع^{2}}} \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$جس\ سے \quad طہ - عہ = \int \frac{ع\ فرر}{ر\sqrt{ر^{2} - ع^{2}}} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

اضافہ شدہ مستقل عہ کے تغیر کا اثر صرف اتنا ہے کہ یہ منحنی کو با تمام و کے گرد ایک زاویہ میں سے گھما دیتا ہے۔

۳۱۲

مثال ۱ — مساوی الزاویہ لولبی میں

$$ع = ر جب\ عہ \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

مثال ۲ — دائرہ میں $ر = ۲ا\ جب\ طہ$ (دفعہ ۶۳) اور $فہ = طہ$

$$اس\ لئے \quad \frac{ع}{ر} = \frac{ر}{۲ا} \quad یعنی \quad ع = \frac{ر^{2}}{۲ا} \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$(۳)\ مکافی\ میں \quad ر = ا\ قط^{2}\frac{طہ}{۲} \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

جہاں ماسکہ قطب ہے، ہمیں حاصل ہوگا $فہ = \frac{\pi}{۲} - \frac{طہ}{۲}$ ، $ع = ر جم\frac{طہ}{۲}$ ، جس سے

$$ع^{2} = ا\ ر \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$

اِس منحنی کی یہ مشہور خاصیت ہے ۔

یہ مثال اور اوپر کی مثال دونوں ایک عام نتیجہ کے اندر شامل ہیں اور یہ نتیجہ اس نمونہ

$$\text{ر}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}}\ \text{جم ن طہ} \quad \ldots\ldots\ (۱۳)$$

کے تمام منحنیات کے متعلق صادق آتا ہے ۔

دفعہ ۱۲۸ (۹) کی رو سے $\quad \text{ع} = \text{ر جب فہ} = \text{ر جم ن طہ} \quad \ldots\ (۱۴)$

اور طہ ساقط کرنے سے $\quad \text{ع} = \dfrac{\text{ر}^{\text{ن}+۱}}{\text{ا}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots\ (۱۵)$

مثلاً صنوبری $(\text{ن} = \frac{۱}{۲})$ کی صورت میں $\quad \text{ع}^۲ = \dfrac{\text{ر}^۳}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ (۱۶)$

مثال ۴ ۔ مرکز دار مخروطوں کی مماسی قطبی مساوات یہاں دیجاتی ہے کیونکہ بعض اوقات حرکیات میں یہ استعمال ہوتے ہیں، اگرچہ ثبوت میں احصا کے استعمال کی ضرورت نہیں ۔

فرض کرو کہ مبدأ مرکز پر ہے ۔ مخروطی کی کارٹیزی مساوات یہ ہے

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} \pm \frac{\text{صا}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱ \quad \ldots\ldots\ (۱۷)$$

اگر بہ مزدوج نیم قطر ہو تو مرکز دار مخروطیوں کے معلومہ خواص کی بنا پر

$$\text{ع بہ} = \text{ا ب}،\quad \text{بہ}^۲ \pm \text{ر}^۲ = \text{ب}^۲ \pm \text{ا}^۲ \quad \ldots\ldots\ (۱۸)$$

اسلئے $\quad \dfrac{\text{ا}^۲\text{ب}^۲}{\text{ع}^۲} = \text{ب}^۲ \pm \text{ا}^۲ \mp \text{ر}^۲ \quad \ldots\ldots\ (۱۹)$

قائم قطع زائد کی خاص صورت میں $\quad \text{ع ر} = \text{ا}^۲ \quad \ldots\ldots\ (۲۰)$ کیونکہ $\text{بہ} = \text{ر}$ ۔

یہی نتیجہ اوپر (۱۵) میں $\text{ن} = -۲$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ۔

مثال ۵ ۔ اِس کے بعد ایک ماسکہ کو قطب مانکر دوسرے ماسکہ کے لحاظ سے عمود اور سمتی نیم قطر کو بالترتیب عَ اور رَ سے تعبیر کرو ۔ چونکہ مماس دو ماسکی نیم قطروں سے مساوی زاویے بناتا ہے اسلئے

۲۱۳

$$\frac{\text{ع}}{\text{ر}} = \frac{\text{عَ}}{\text{رَ}} \quad \text{اور اس لئے} \quad \frac{\text{ع}^۲}{\text{ر}^۲} = \frac{\text{ع عَ}}{\text{ر رَ}}$$

اب $ع\,عَ = ب^۲$ اور قطع ناقص میں $ر + رَ = ۲\,ا$، اس لئے قطع ناقص کے لئے $\frac{ع^۲}{ر} = \frac{ب^۲}{۲\,ا - ر}$ یا اگر نیم وتر خاص $\left(\frac{ب^۲}{ا}\right)$ کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو

$$\frac{ل}{ع^۲} = \frac{۲}{ر} - \frac{۱}{ا} \qquad (۲۱)$$

قطع زائد میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ع^۲} = \pm \frac{۲}{ر} + \frac{۱}{ا} \qquad (۲۲)$$

اوپر کی علامت اُس شاخ سے متعلق ہے جو مبدأ کے پاس ہے اور نیچے کی دور کی شاخ سے۔

مثال ۶۔ وہ منحنی دریافت کرو جسکے لئے $ع = \frac{ر^۳}{ا^۲}$ (۲۳)

(۶) میں درج کرنے اور تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$طہ - عہ = \int \frac{ا^۲\, د\,ر}{ر\sqrt{ا^۴ - ر^۴}} = \frac{۱}{۲} جب^{-۱} \frac{ر^۲}{ا^۲}$$

$$یا \quad ر^۲ = ا^۲ جب ۲ (طہ - عہ) \qquad (۲۴)$$

جو چشمہ منحنی ہے۔

۱۳۰۔ مربوط منحنی۔ تقلیب۔ کئی ہندسی نظریے ہیں جن میں ایک منحنی، ایک اور منحنی کے ساتھ ایک خاص رشتہ کے ذریعہ متعلق ہوتا ہے۔ اسکی سادہ مثال تقلیب (Inversion) کی ہے۔ اگر ایک ثابت مبدأ و سے کسی معلومہ منحنی کا سمتی نیم قطر و پ کھینچا جائے اور و پ پر ایک نقطہ پَ ایسا لیا جائے کہ

$$و پ \times و پَ = م^۲ \qquad (۱)$$

جہاں م ایک دیا ہوا مستقل ہے، تو پَ کے طریق کو ہم پ کے طریق کا معکوس کہینگے۔ مبدأ و کو مرکز کہا جاتا ہے اور م^۲ کو تقلیب کا "مستقل"۔

شکل (۹۹)

۲۱۴ کوئی منحنی اور اس کا مقلوب سمتی نیم قطر کے ساتھ تکمل زاویے بناتے ہیں۔ کیونکہ اگر پ اور ق کسی منحنی کے متصل نقطے ہوں اور پَ، قَ مقلوب منحنی کے متناظر نقطے ہوں تو وپ × وپَ = وق × وقَ اور اسلئے

وپ : وق = وقَ : وپَ . . . . (۲)

اس لئے مثلث پ و ق اور قَ و پَ باہم متشابہ ہیں اور زاویوں وپ ق اور وپَ قَ کا مجموعہ دو قائمہ ہے، انتہا میں جب ق، پ کے لاانتہا قریب ہو تو یہ زاویے وہ ہونگے جو مختلف مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتے ہیں۔

ہندسہ کی ابتدائی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے سوائے اس خاص صورت کے جبکہ تقلیب کا مرکز محیط پر ہو اور اس صورت میں ایک خط مستقیم ہے۔

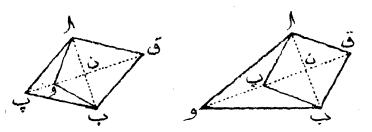
کئی ترکیبوں سے ایک اد کرے ہوئے منحنی کا مقلوب آلی طریق سے مرتسم ہو سکتا ہے۔

(۱) پوسیلئے (Peaucellier) کا رابطہ۔

اس میں چار سلاخوں کا ایک معین پ ا ق ب ہوتا ہے جس میں سلاخوں کے سرے چولوں کے ذریعہ آزادانہ طور پر وصل کئے ہوئے ہیں، نیز اسمیں اور دو مساوی سلاخیں ہوتی ہیں جو متقابل کے کونوں ا، ب کو و پر کی ایک ثابت چول کے ساتھ ملاتی ہیں۔

ظاہر ہے کہ رابطہ خواہ کوئی شکل یا وضع اختیار کرے نقاط پ، ق ہمیشہ و میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے۔ اگر معین کے

وتروں کا نقطہ تقاطع ن ہو تو

وپ × وق = ون^۲ - پ ن^۲ = و ا^۲ - ا پ^۲ = مستقل ... (۱)

شکل (۱۰۰)

اسلئے اگر پ (یا ق) سے کوئی ایک منحنی مرتسم کرایا جائے تو ق (یا پ) بلحاظ نقطہ و کے مقلوب منحنی مرتسم کریگا۔

خاص طور پر اگر پ کو ایک ثابت چول س کے ساتھ کڑی کے ذریعہ منسلک کر دیا جائے اور س و = س پ تو پ کا طریق نقطہ و میں سے ایک دائرہ ہوگا اور اس لئے ق کا طریق و س پر علی القوائم ایک خط مستقیم ہوگا۔

اس سے اوس ضروری عملی مسئلہ کا صحیح حل حاصل ہوتا ہے کہ دائری حرکت کو حرکت مستقیم میں رابطہ کاری کے ذریعہ کس طرح تبدیل کیا جائے۔

۳۱۵

شکل (۱۰۱)

(۲) ہارٹ (Hart) کا رابطہ۔

اس میں ایک " جلیبی " متوازی الاضلاع اب ج د ہوتا ہے جو چار سلاخوں کے سروں کو چولوں کے ذریعہ جوڑنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس کے متبادل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰ صفحہ ۴۳۱۔

نقطہ و کو ایک ضلع اب میں ایک ثابت چول قرار دیا جاتا ہے اور نقاط پ، ق بالترتیب اضلاع اد اور ب ج میں نقاط ہیں ایسے کہ

اپ : پ د = ج ق : ق ب = او : و ب = م : ن (فرض کرو)۔

صریحاً و، پ، ق ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو اج اور ب د کے متوازی ہے۔

اگر ا اور ج کے قائم ظل ب د پر ل اور ک ہوں اور ن، ب د کا نقطہ وسطی ہو تو اج × ب د = ۲ ن ل × ۲ ن ب = دل۲ - ب ل۲

= اد۲ - اب۲

اب وپ : ب د = او : اب = م : م + ن

وق : اج = ب و : اب = ن : م + ن

اس لئے وپ × وق = $\frac{\text{م ن}}{(\text{م + ن})^2}$ (اد۲ - اب۲) = مستقل ......(۲)

اسلئے پ اور ق بلحاظ و کے مقلوب منحنی مرتسم کرتے ہیں۔

پہلے کیطرح اگر پ کو کڑی پ س کے ذریعہ جو س و کے مساوی ہے ایک ثابت چول س کے ساتھ منسلک کر دیا جائے تو دائری حرکت خط مستقیم میں تبدیل ہو سکے گی۔

۱۳۱ - پائین منحنی، مکافی قطبی۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے منحنی کے کسی مماس پر عمود و سے کھینچا جائے تو اس عمود کے پایہ سے کے طریق کو بلحاظ مبدأ و کے اصلی منحنی کا " پائین منحنی " کہتے ہیں۔

مثلاً مکافی کا پائین منحنی بلحاظ ماسکہ کے راس پر کا مماس ہے قطع ناقص

یا زائد کا پائین منحنی بلحاظ کسی ماسکہ کے "معاون دائرہ" ہے۔
اگر وے = ع اور سا وہ زاویہ ہو جو وے کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ بناتا ہے تو ے کے قطبی محدد ع، سا خیال کئے جاسکتے ہیں جبکہ و قطب ہو۔ اس لئے اگر ع اور سا کے درمیان رشتہ معلوم ہو سکے تو پائین منحنی کی قطبی مساوات فوراً لکھی جاسکتی ہے۔
کسی منحنی اور اس کے پائین کے تناظر نقاط پر سمتی نیم قطر مماسوں کے ساتھ جو زاویے بناتے ہیں وہ باہم مساوی ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ و سے دو منفصل مماسوں پ ے، پ ےَ پر عمود وے، وےَ ہیں اور ےےَ ممدودہ پر عمود و ع ہے۔ وپ کے قطر پر جو دائرہ بنایا جائے نقاط ے، ےَ اس پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے چار ضلعی وےےَپ کا خارجی زاویہ وےع مقابل کے داخلی زاویہ وپےَ کے مساوی ہے۔ لیکن انتہا میں یہ وہ زاویے ہیں جو وے اور وپ بالترتیب پائین منحنی کے مماس اور اصلی منحنی کے مماس کے ساتھ بناتے ہیں۔

شکل (۱۰۲)

نیز متشابہ مثلثوں سے

و ع : وے = وےَ : وپ ..... (۱)

اسلئے اگر اصلی منحنی کا سمتی نیم قطر ر ہو اور ع عمود ہو وے مماس پر

اور عَ عمود ہو و سے پائیں کے مماس پر تو بالآخر

$$\frac{عَ}{ع} = \frac{ع}{ر} \quad یا \quad عَ = \frac{ع^{۲}}{ر} \quad ....(۲)$$

نیز اگر وَےَ، پ ے سے ن پر ملے تو ہم لکھہ سکتے

وے = ع، وےَ = ع + مف ع، ےے وےَ = ےپ ےَ = مف سا

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے قطع نظر کرنے سے

مف ع = ن ےَ = پ ےَ مف سا

اسلئے انتہا لینے سے، جبکہ پَ ےَ، پ ے پر منطبق ہو ہمیں منحنی کے مماس پر سمتی نیم قطر کے ظل کے لئے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$پ ے = \frac{فر ع}{فر سا} \quad ....(۳)$$

اس نتیجہ کی مدد سے "منفی پائیں منحنیوں" کا سوال حل ہو جاتا ہے یعنی اسکی مدد سے وہ منحنی مل جاتا ہے جس کا پائیں کوئی دیا ہوا منحنی ہو۔ اگر و کو مبدا اور سا کے ابتدائی خط کو محور لا مانا جائے تو نقطہ تماس پ کے محددیں

۲۱۷

لا = وے جم سا ۔ ے پ جب سا

ما = وے جب سا + ے پ جم سا

$$\left.\begin{array}{l} یا \quad لا = ع\, جم\, سا - \frac{فر ع}{فر سا}\, جب\, سا \\ ما = ع\, جب\, سا + \frac{فر ع}{فر سا}\, جم\, سا \end{array}\right\} \quad ....(۴)$$

مثال ۱۔ اگر مخروطی $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} \pm \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ ....(۵)

کے مرکز پر مبدا ہو اور سا وہ زاویہ جو ع و لا کے ساتھہ بناتا ہے تو مخروطی تراشوں کی کتابوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

$$ع^{۲} = ا^{۲} جم^{۲} سا \pm ب^{۲} جب^{۲} سا \quad ....(۶)$$

اس لئے پائیں منحنی کی قطبی مساوات ہے

$$ر^۲ = ا^۲ جم^۲ طہ \pm ب^۲ جب^۲ طہ \quad (۷)$$

قائم زائد $\quad لا^۲ - ما^۲ = ا^۲ \quad (۸)$

کی صورت میں پائیں منحنی ہے $\quad ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ \quad (۹)$

مثال ۲۔ نیم قطر ا کے دائرے میں جہاں قطب و مرکز ج سے فاصلہ ج پر واقع ہو اگر خط و ج کو سا کا مبدأ مانا جائے تو شکل سے ظاہر ہے کہ

$$ع = ا + ج جم سا \quad (۱۰)$$

اسلئے پائیں منحنی گھونگا منحنی ہے

$$ر = ا + ج جم طہ \quad (۱۱)$$

اگر و محیط پر ہو جس صورت میں ج = ا تو پائیں منحنی خط صنوبری ہوگا

$$ر = ا (۱ + جم طہ) \quad (۱۲)$$

مثال ۳۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کا پائیں صنوبری

$$ر = ا (۱ + جم طہ) \quad (۱۳)$$

ہے۔ اِس مساوات کو اِس طرح لکھنے سے

$$ع = ا (۱ + جم سا) \quad (۱۴)$$

ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ا جم سا + ا^{\prime} ما = ا جب سا$$

جس سے $\quad (لا - ا)^۲ + ما^۲ = ا^۲ \quad (۱۵)$

جو مبدأ میں سے گذرنے والا ایک دائرہ ہے۔

کسی منحنی ح کے مماس کے قطب کا طریق بلحاظ ایک ثابت مخروطی کے "شکافی قطبی" کہلاتا ہے، مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ح کے مماسوں کے قطبوں کا طریق حَ ہو تو حَ کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ح ہوگا۔ "شکافی" کے استعمال کی یہی وجہ ہے۔

۳۱۸

ہم اُس صورت کا یہاں محض سرسری ذکر کر دینگے جبکہ ثابت مخروطی دائرہ ہو۔ اگر اس دائرہ کا مرکز و ہو اور نیم قطر م تو منحنی ح کے کسی مماس کا قطب پ

اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اس مماس پر و سے عمود نکالا جائے اور و ے پر ایک نقطہ پ ایسا لیا جائے کہ

و ے × و پ = م^۲ . . . . (۱۶)

اس لئے اس صورت میں تشکانی قطبی بلحاظ نقطہ و کے دئے ہوئے منحنی کے پائیر کا مقلوب ہے۔

شکل (۱۰۳)

اوپر کی تشکانی خاصیت کی رو سے، اصلی منحنی کو پ کے طریق کے پائیں کا مقلوب ہونا چاہئے۔ اسکی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ کیونکہ اگر پ اصلی منحنی کے ساتھ مماس کا نقطہ تماس ہو اور اگر و پ، پ کے طریق کے مماس کو ے پر ملے تو زاویہ و پ ے اور و پ ے مساوی ہونگے۔ اس لئے و ے پ زاویہ قائمہ ہے اور ے، پ کے پائیں منحنی کو مرتسم کرتا ہے۔ اور چونکہ پ ے پ ے ہم محیط چار ضلعی ہے اس لئے

و پ × و ے = و ے × و پ = م^۲ . . . . (۱۷)

اس لئے پ، ے کے طریق کا مقلوب مرتسم کرتا ہے۔

مثال ۴۔ دائرہ کا قطبی تشکانی بلحاظ کسی مبدأ کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا مبدأ ماسکہ ہے۔

مثال ۲ کی مانند دائرہ کے پائیں منحنی کا ضابطہ ہے

ع = ا + ج جم سا . . . . (۱۸)

سا کی بجائے طہ اور ع کے لئے $\frac{م^2}{ر}$ لکھنے سے ہمیں قطبی مکانی کی مساوات اس شکل میں حاصل ہوتی ہے

$$\frac{م^2}{ر} = ۱ + ج \text{ جم } طہ \qquad .... (۱۹)$$

جو ایک مخروطی تراش ہے، جس کا ماسکہ مبدا پر ہے اور جس کا خروج المرکز $\frac{ج}{ا^2}$ ہے۔ ۳۱۹
اس لئے مخروطی قطع ناقص، مکافی یا زائد ہے بموجب اس کے کہ مبدا دائرہ کے اندر، اوپر یا باہر ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} \pm \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ .... (۲۰)

کا پائین منحنی بلحاظ مبدا کے یہ ہے

$$ع^2 = ا^2 \text{جم}^2 سا \pm ب^2 \text{جب}^2 سا \qquad .... (۲۱)$$

اس لئے قطبی مکانی ہے

$$\frac{م^2}{ر^2} = ا^2 \text{جم}^2 طہ \pm ب^2 \text{جب}^2 طہ \qquad .... (۲۲)$$

یا

$$ا^2 لا^2 \pm ب^2 ما^2 = م^4 \qquad .... (۲۳)$$

جو ایک اہم مرکزِ مخروطی تراش ہے۔

۱۳۲۔ دو قطبی محدد۔ اگر کسی منحنی پر کوئی نقطہ پ ہو اور دو ثابت نقطوں یا ماسکوں س، سَ سے اس نقطہ کے فاصلے (ر، رَ) ہوں تو ان فاصلوں کے درمیان جو اس منحنی کے لئے رشتہ ہے اس کے ذریعہ اس منحنی کی تعریف ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$ف(ر، رَ) = ۰ \qquad .... (۱)$$

اگر زاویوں پ س سَ، پ سَ س کو بالترتیب طہ، طہَ سے تعبیر کیا جائے اور جو زاویے نیم قطر ر، رَ مماس کے ساتھ بناتے ہیں وہ فہ، فہَ ہوں تو دفعہ ۱۱۲ کی مانند

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} &= \text{جم فہ}، \quad \frac{\text{فرر}'}{\text{زس}} = \text{جم فہ}' \\ \frac{\text{رفرطہ}}{\text{فرس}} &= \text{جب فہ}، \quad \frac{\text{رَفرطہَ}}{\text{فرس}} = \text{جب فہَ} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (۲)$$

علاوہ ازیں ذیل کے رشتے ہیں

$$\text{رجب طہ} = \text{رَجب طہَ}، \quad \text{رجم طہ} + \text{رَجم طہَ} = ۲\text{ج} \dots\dots (۳)$$

جہاں　$\text{ج} = \frac{۱}{۲}\ \text{س سَ}$

شکل (۱۰۴)

۳۲۰　مثال ۱- ناقص میں $\text{ر} + \text{رَ} = ۲\text{ا}$ $\dots\dots\dots (۴)$

اس لئے $\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فرر}'}{\text{فرس}} =$ یعنی جم فہ + جم فہَ = . یا فہَ = π - فہ ..(۵)

اس لئے ماسکی فاصلے منحنی کے ساتھ مکمل زاوے بناتے ہیں۔

اسی طرح سے قطع زائد میں $\text{ر} - \text{رَ} = ۲\text{ا}$ $\dots\dots\dots (۶)$

جم فہ = جم فہَ $\dots\dots\dots (۷)$

یعنی ماسکی فاصلے منحنی کے ساتھ متقابل جانبوں میں مساوی زاوے بناتے ہیں۔

مثال ۲ - ایک انعکاسی یا انعطافی سطح کی شکل دریافت کرو کہ تمام ایسی شعاعیں جو ایک ثابت نقطہ س میں سے گذرتی ہیں اور اس پر گرتی ہیں انعکاس اور انعطاف

کے بعد بھی ایک ثابت نقطہ س َ میں سے گذریں ۔

انعکاس کی صورت مثال (۱) کا عکس ہوگی سطح ایسی ہونا چاہئے جو ناقص یا زائد کو، ناسکوں (س، س َ) کے ملانے والے خط کے گرد پھرانے سے حاصل ہو۔

انعطاف کی صورت میں اگر دو واسطوں کے انعطاف نما م‍ا اور م‍اَ ہوں

تو م‍ا جب ضہ = م‍اَ جب ضہَ ....(۸)

جہاں ضہ = ± (π/۲ - فا) ، ضہَ = ± (π/۲ - فاَ) .....(۹)

اس لئے م‍ا جم فا ± م‍اَ جم فاَ = ...(۱۰)

یا ف/فس (م‍ا ر ± م‍اَ رَ) = ...(۱۱)

تکمل سے م‍ا ر ± م‍اَ رَ = مستقل ....(۱۲)

ایسے منحنیات جن میں دو نیم قطروں کے معلومہ ضعفوں کا مجموعہ (یا فرق) مستقل ہو کارٹیزی بیضہ کہلاتے ہیں کیونکہ ڈی کارٹ نے ہی ابتدا میں علم مناظر کے اس مسئلہ پر بحث کی۔ جب (۱۲) میں نچلی علامت لیجاتی ہے تو اس قبیل کے اندر دائرہ

$$\frac{ر}{رَ} = \frac{م‍ا}{م‍اَ} \quad ....(۱۳)$$

شامل ہوجاتا ہے، دیکھو شکل ۱۰۵ ۔

۲۲۱

شکل (۱۰۵)

مثال ۳- کیسینی (Cassini) کے بیضوی منحنیات کی یہ تعریف ہے۔

$$ر\,رَ = م^{2} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

جہاں م مستقل ہے۔ چونکہ ایک ایسے نقطہ پ کے لئے جو خط س سَ پر نقاط س، سَ کے درمیان واقع ہو ر رَ کی بڑی سے بڑی قیمت $ج^{2}$ ہے اس لئے منحنی دو الگ بیضوں پر مشتمل ہوگا جو بالترتیب س، سَ کے گرد بنے ہونگے اگر $م < ج$ اور صرف ایک بیضہ پر مشتمل ہوگا جو دونوں نقاط کو گھیرے ہوئے ہوگا جبکہ $م > ج$۔

اس خاص صورت میں جبکہ $م = ج$، منحنی کی عینک جیسی شکل ہوگی۔ اسے ہم برنولی کا چشمہ منحنی (Lemniscate.) کہینگے۔ یہ منحنی متعدد مسائل ریاضی میں آتا ہے۔ اگر س سَ کے وسطی نقطہ و کو قطب مانا جائے اور و س کو ابتدائی خط اور ان کے لحاظ سے محددوں کا ایک نظام ($ر_{1}$، $طہ_{1}$) ہو تو

$$ر^{2} = ر_{1}^{2} + ج^{2} - ۲\,ج\,ر_{1}\,جم\,طہ_{1}،\quad رَ^{2} = ر_{1}^{2} + ج^{2} + ۲\,ج\,ر_{1}\,جم\,طہ_{1}$$

اسلئے چشمہ منحنی کی مساوات ہے

$$(ر_{1}^{2} + ج^{2})^{2} - ۴\,ج^{2}\,ر_{1}^{2}\,جم^{2}\,طہ_{1} = ج^{4}$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے

$$ر_{1}^{2} = ۲\,ج^{2}\,جم\,۲\,طہ_{1} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

مقابلہ کر دفعہ ۱۲۸ کے ساتھ۔

شکل (۱۰۶)

۲۲۲

مثال ۴ - مقناطیسی منحنی - اگر س، سَ ایک مقناطیس کے شمالی اور جنوبی قطب ہوں تو کسی نقطہ پ پر قوتیں ہونگی $\frac{م}{ر^۲}$ سمت س پ میں اور $\frac{م}{رَ^۲}$ سمت پ سَ میں - "قوت کا خط" ایسا خط ہے جو نقطہ نقطہ حاصل قوت کی سمت میں کھینچا جائے - اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی عمود وار سمت میں صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{م}{ر^۲} \text{جب } ف + \frac{م}{رَ^۲} \text{جب } فَ = ۰$$

یا

$$\frac{۱}{ر} \frac{فر طہ}{فر س} + \frac{۱}{رَ} \frac{فر طہَ}{فر س} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

اب چونکہ ر جب طہ = رَ جب طہَ اس لئے

$$\text{جب طہ } \frac{فر طہ}{فر س} + \text{جب طہَ } \frac{فر طہَ}{فر س} = ۰$$

یا

$$\text{جم طہ} + \text{جم طہَ} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

"مساوی قوۃ کا خط" وہ ہے کہ ایک مقناطیسی قطب پر جو اسے مرتسم کرے کوئی کام نہ ہو - اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی سمت میں صفر ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{م}{ر^۲} \text{جم } ف - \frac{م}{رَ^۲} \text{جم } فَ = ۰$$

یا

$$\frac{۱}{ر^۲} \frac{فر ر}{فر س} - \frac{۱}{رَ^۲} \frac{فر رَ}{فر س} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

جس سے

$$\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{رَ} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

مساوی قوۃ کے خط لازماً قوت کے خطوط پر علی القوائم ہونگے -

امثلہ ۲۴

جبریہ منحنی

۱۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ها}^{2} = ۴\text{لا}(۱ - \text{لا})$ ، $\text{ها}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{لا} + ۱$

۲۔ منحنی $\text{ا}\,\text{ها}^{2} = \text{لا}^{2}(\text{ا} - \text{لا})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکے حلقہ کا رقبہ $\frac{۸}{۱۵}\text{ا}^{2}$ ہے۔ یہ معلوم کرو کہ حلقہ کا عرض کہاں بڑے سے بڑا ہے۔ $[\text{لا} = \frac{۲}{۳}\text{ا}]$

۳۔ منحنی $\text{ا}^{2}\text{ها}^{2} = \text{لا}^{2}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے دو حلقے ہیں اور ہر ایک کا رقبہ $\frac{۲}{۳}\text{ا}^{2}$ ہے۔

۴۔ منحنیات $\text{ها}^{2} = \text{لا}(\text{لا}^{2} - ۱)$ ، $\text{ها}^{2} = \text{لا}^{3}(۱ - \text{لا})$ کو مرتسم کرو۔ ۴۲۴

۵۔ منحنی $\text{ا}^{4}\text{ها}^{2} = \text{لا}^{4}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\frac{۱}{۴}\pi\,\text{ا}^{2}$ ہے۔

۶۔ منحنی $\text{ا}^{2}\text{ها}^{2} = \text{لا}^{4}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکا رقبہ $\frac{۸}{۵}\text{ا}^{2}$ ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ منحنی $\text{ا}\,\text{ها}^{2} = \text{لا}^{3}$ (شکل ۷۰) کی قوس کا طول، رائس سے اس نقطہ تک جس کا فصلہ لا ہے، یہ ہے $\frac{۱}{۲۷\sqrt{\text{ا}}}(۹\text{لا} + ۴\text{ا})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۸}{۲۷}\text{ا}$

۸۔ منحنی $\text{ا}\,\text{ها}^{2} = \text{لا}^{3}$ اور خط $\text{لا} = \text{ھ}$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسکا اوسط مرکز $(\frac{۵}{۷}\text{ھ}، ۰)$ ہے۔

۹۔ منحنی $\text{ا}\,\text{ها}^{2} = \text{لا}^{3}$ محور لا کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ وہ حجم جو سطح مکونہ اور محور پر عمود دار ایک مستوی کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اُس مستدیر اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا طول اور دائری قاعدہ دونوں وہی ہیں جو سطح مقطوعہ کے ہیں۔

۱۰۔ اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ها}^{2} = \frac{۱}{\text{لا}}$ ، $\text{ها}^{2} = \frac{۱}{\text{لا}(۱ - \text{لا})}$

۱۱۔ رقبہ جو منحنی $\frac{\text{ها}^{2}}{\text{ا}^{2}} = \frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}}$ (شکل ۲۷) اور اِس کے متقارب کے درمیان

گھرا ہوا ہے وہ π $ا^2$ ہے ۔
اگر یہی منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{2}\pi^2 ا^3$ ہوگا ۔

۱۲ ۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو $ی^2 = \frac{لا^2+1}{لا}$ ، $ی^2 = \frac{لا^2-1}{لا}$

۱۳ ۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو $ی^2 = \frac{لا^2+1}{لا^2}$ ، $ی^2 = \frac{لا^2-1}{لا^2}$

۱۴ ۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو $ی^2 = \frac{لا}{1+لا^2}$ ، $ی^2 = \frac{لا}{1-لا^2}$
اعظم اور اقل معین (اگر کوئی ہوں) اور نقاط انعطاف دریافت کرو ۔

۳۲۴

۱۵ ۔ منحنی $ی^2 = \frac{لا^3}{ا-لا}$ (شکل ۴۷) اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $\frac{3}{4}\pi ا^2$ ہے ۔ اگر یہ منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{4}\pi^2 ا^3$ ہوگا ۔

۱۶ ۔ منحنی $ی^2 = \frac{ا^2 لا^2}{ا^2+لا^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اسکی دو شاخوں اور کسی ایک متقارب کے درمیان ۲ $ا^2$ ہے ۔

۱۷ ۔ ثابت کرو کہ منحنی $ی^2 = لا^2 \frac{ا+لا}{ا-لا}$ (شکل ۴۳) اور اس کے متقارب کے درمیان کا رقبہ $\frac{1}{2}(\pi+4) ا^2$ ہے ۔

۱۸ ۔ منحنی $ی^2 = \frac{لا^4}{ا^2-لا^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ منحنی اور کسی ایک متقارب کے درمیان رقبہ $\frac{1}{2}\pi ا^2$ ہے ۔

۱۹ ۔ منحنی $ی^2 = لا^2 \frac{ا^2-لا^2}{ا^2+لا^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے حلقہ کا رقبہ $\frac{1}{2}(\pi-2) ا^2$ ہے ۔

۲۰ ۔ منحنی $ما^2 = \frac{لا^2}{ا^2}(۲ا - لا)(لا - ا)$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ رقبہ $\frac{۳}{۸}\pi ا^2$ گھیرتا ہے۔

۲۱ ۔ منحنی $ما^2 = \frac{لا}{ا}(لا - ب)^2 + ج^2$ کو مرتسم کرو۔

۲۲ ۔ منحنی $لا = ت - ت^3$ ، $ما = ۱ - ت^4$ کو ت کی حقیقی قیمتوں کے لئے مرتسم کرو۔ اور ثابت کرو کہ یہ ایک حلقہ پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ $\frac{۱۲}{۳۵}$ ہے۔

۴۲۵

امثلہ ۵۳

(زنجیرہ، خط تدویر وغیرہ)

۱ ۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ $ما = ج \text{ جمز } \frac{لا}{ج}$ میں $س^2 = ما^2 - ج^2$

۲ ۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ ہی ایک منحنی ہے جس میں معین کے پایہ سے مماس پر عمود مستقل طول کا ہوتا ہے۔

۳ ۔ ایک ہی اونچائی پر دو معلومہ نقطے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام زنجیرہ خطوط میں سے جو ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور جن کے محور انتصابی ہیں ایک زنجیرہ ایسا ہے جس میں ان نقاط کے نیچے مرتب کی گہرائی کم سے کم ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اس زنجیرہ میں مذکورہ نقطوں پہ کے مماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

اگر ان نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ب ہو تو مرتب کی گہرائی ب جمز ع ہے منحنی کی قوس $\frac{ب \text{ جمز } ع}{ع}$ ہے اور دئے ہوئے نقاط پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ $جم^{-1}$ (قطز ع) ہے جہاں ع مساوات ع مسز ع = ۱ کی مثبت اصل ہے۔

۴ - خط جری (Tractrix) کے کسی نقطہ کے محدد ان شکلوں میں بیان ہو سکتے ہیں لا = ا (ع - مسن ع)، ما = ا قطن ع
جہاں ع متغیر متبدل (parameter.) ہے۔

۵ - ثابت کرو کہ خط جری میں ما = ا قو^{-س/ا}
جہاں قوس س قرن سے ناپی گئی ہے۔

۶ - اس مجسم کا حجم جو خط جری کو اس کے متقارب کے گرد گھمانے سے پیدا ہو $\frac{۲}{۳}$ π ا^۳ ہے۔
اسی مجسم کی سطح ۴ π ا^۲ ہے۔

۷ - اگر ایک متحرک نقطہ کے محدد لا = ا جمز ن ت، ما = ب جبز ن ت ہوں جہاں ت وقت ہے تو اس کا راستہ قطع زائد ہو گا اور اس کی رفتار مزدوج نیم قطر کے طول کے متناسب ہو گی جو مزدوج زائد کے ساتھ اسکے تقاطع تک ناپا گیا ہے۔
نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے۔

۸ - لیسازو کے منحنی لا = ا جب ۲ (ن ت - صہ)، ما = ب جم ن ت کے کسی حلقہ کا رقبہ $\frac{۴}{۳}$ ا ب جم ۲ صہ ہے۔

۹ - ثابت کرو کہ لیسازو کا منحنی لا = ا جم ن ت، ما = ب جم ۳ ن ت ۳۲۱
منحنی $\frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ا}$ (۴ $\frac{لا^۲}{ا^۲}$ - ۳) کے کچھ حصہ پر مشتمل ہے۔ اس منحنی کو مرتسم کرو۔

۱۰ - اگر خط تدویر میں لڑھکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرتسم نقطہ پ کی رفتار عماد سے پ (شکل ۱) کے متناسب ہو گی۔

۱۱ - خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد گردش دینے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم ۵ π^۲ ا^۳ ہے جہاں مکون دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔
اسی مجسم کی سطح $\frac{۶۴}{۳}$ π ا^۲ ہے۔

۱۲ - خط تدویر کا وہ حصہ جو دو متواتر قرنوں کے درمیان ہے راس پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مکونہ کا رقبہ $\frac{۳۲}{۳}$ π ا^۲ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مذکورہ بالا سطح اور اُن دائروں کے مستویوں کے درمیان جنہیں قرن پیدا کرتے ہیں گھِرا ہوا حجم π^2 ا^3 ہے۔

۱۳ــ خط تدویر اپنے محور کے گرد گھومنے سے جو حجم پیدا کرتا ہے وہ ہے $\frac{1}{6}$ (۹ π^2 ــ ۱۶) π ا^3 ــ

۱۴ــ اسی مجسم کی سطح $\frac{8}{3}$ (۳ π ــ ۴) π ا^2 ہے۔

۱۵ــ ایک قرن سے دوسرے قرن تک جو خط تدویر کی قوس ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے $\frac{4}{3}$ا فاصلہ پر ہے۔

۱۶ــ خط تدویر اور اسکے قاعدہ کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے فاصلہ $\frac{5}{6}$ ا پر ہے۔

۱۷ــ ثابت کرو کہ منحنی لا$^{\frac{2}{3}}$ + ما$^{\frac{2}{3}}$ = ا$^{\frac{2}{3}}$ میں کسی نقطہ پر کا مماس محددوں کے محوروں پر جو مقطوعے کاٹتا ہے وہ بالترتیب ا$^{\frac{2}{3}}$ لا$^{\frac{1}{3}}$ اور ا$^{\frac{2}{3}}$ ما$^{\frac{1}{3}}$ ہیں۔

اس طرح اس کی تصدیق کرو کہ محوروں کے درمیان مماس کا طول مستقل ہے۔

۱۸ــ مساواتوں لا = اجم^3 طہ، ما = اجب^3 طہ سے ثابت کرو کہ ستارہ نما (Astroid) میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ = ۳ اجب طہ جم طہ اور اسلئے منحنی کا کل طول ۶ ا ہے۔

۱۹ــ ثابت کرو کہ ستارہ نما کا کل رقبہ $\frac{3}{8}$ π ا^2 ہے۔

۲۰ــ دو مقابل کے قرنوں کو ملانے والے خط کے گرد ستارہ نما کو گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم $\frac{32}{105}$ π ا^3 ہے۔ ۳۲۷

۲۱ــ منحنی لا = اجم^3 طہ، ما = ب جب^3 طہ کے ربع کا طول $\frac{\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}}$ ہے اور رقبہ جو منحنی گھیرتا ہے وہ $\frac{3}{8}$ π ا ب ہے۔

۲۲ــ ن، قرنوں والے بریا در تدویر کا کل محیط $\frac{8(\text{ن} \pm 1)}{\text{ن}}$ ا ہے جہاں ا

ثابت دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۳ ۔ اُس منحنی کا خاکہ کھینچو جو دو یکساں دائری حرکتوں کو ترکیب دینے سے پیدا ہو جبکہ دائروں کے نیم قطر مساوی ہوں لیکن دَور ذرا مختلف ہوں (۱) جبکہ گھماؤ ایک ہی سمت میں ہوں اور (۲) جبکہ گھماؤ مقابل سمتوں میں ہوں۔

۲۴ ۔ ثابت کرو کہ بردوریہ میں مماس مرکزمیں سے نہیں گزر سکتا جتنک کہ

ن ج > ن جَ جہاں دو مقداروں ج، جَ میں سے ج بڑا ہے (دفعہ ۲۵)

۲۵ ۔ ثابت کرو کہ استداری ۱۱ = ۱ طہ + ک جب طہ، ۱ + ۱ ک جم طہ پوری موج کا طول ایک قطع ناقص کے محیط کے مساوی ہے جس کے نیم محور ۱ + ک اور ۱ - ک ہیں۔

امثلہ ۴

قطبی محدد

۱ ۔ ثابت کرو کہ ایک ہی زاویہ والے تمام مساوی الزاویہ لولبی متماثلاً مساوی ہوتے ہیں۔

۲ ۔ زاویہ عہ والے مساوی الزاویہ لولبی میں سمتی نیم قطر (ل) جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے $\frac{1}{4}$ (ل$_2^2$ ـ ل$_1^2$) مس عہ جہاں ل$_1$، ل$_2$ اطراف میں ل کی قیمتیں ہیں۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ ارشمیدس کے لولب میں زاویہ (فہ) جو مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان بنتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم فہ} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ل}^2}}$$

۴ ۔ ثابت کرو کہ مکافی لولب میں نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے اس کا اضافہ نیم قطر کے متناسب ہے۔

۵ ۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گزرنے والے تمام وتر ایک ہی طول کے

ہوتے ہیں ۔ کیا یہی بات درست ہے گھونگا منحنی کے لئے ۔

۶ ۔ خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طھ) کا رقبہ $\frac{۳}{۲}$ π ا² ہے ۔

۷ ۔ منحنی ر = ا + ۲ ا جم طھ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اندرونی حلقہ کا رقبہ ۵۴۳۵ء ا² ہے ۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری میں $\frac{فرس}{فرطھ}$ = ۲ ا جم $\frac{طھ}{۲}$ اور اس طرح دکھاؤ کہ کل محیط ۸ ا ہے ۔

۹ ۔ خط صنوبری کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{۸}{۳}$ π ا³ ہے

۱۰ ۔ خط صنوبری میں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا عرض (محور پر عمود وار) $\frac{۳}{۲}$ √۳ ا ہے اور دوہرا مماس محور کو قطب سے فاصلہ $\frac{ا}{۴}$ پر ملتا ہے ۔

۱۱ ۔ گھونگا منحنی ر = ا جم طھ + ج میں اعظم معین اور اقل فصلہ معلوم کرو

۱۲ ۔ گھونگا منحنی ر = ا جم طھ + ج کا رقبہ جبکہ ج > ا ہے π (ج² + $\frac{ا²}{۲}$)

۱۳ ۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ اگر دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کریں اور ایک دوسرے کے ساتھ مستقل زاویہ بنائیں تو انکے تقاطع کا طریق گھونگا منحنی ہے

۱۴ ۔ کل رقبہ چشمہ منحنی ر² = ا² جم ۲ طھ کا ا² ہے ۔

۱۵ ۔ نیز اس منحنی کے ہر حلقہ کا محیط ہے ۲ ا $\int_0^{\frac{\pi}{۴}} \frac{فرطھ}{\sqrt{۱ - ۲ جب^۲ طھ}}$ ۔

ثابت کرو کہ ناقص تکملہ (دفعہ ۱۱۱) کی ترقیم میں یہ تکملہ مساوی ہے

√۲ ا ن، ($\frac{۱}{\sqrt{۲}}$) کے ۔

۳۲۹　۱۶ ۔ چشمہ منحنی کے کسی حلقہ کے رقبہ کا اوسط مرکز قطب سے فاصلہ $\frac{۱}{۸}$ √۲ π ا پر ہے ۔

۱۷ ۔ بردوریہ ر = ا جب م طھ کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے $\frac{\pi ا^۲}{۴ م}$ ۔

۱۸ ۔ منحنی ر² = ا² جم طھ کو مرتسم کرو ۔

۱۹۔ "زیادہ سے زیادہ تجاذب والے مجسم کے لئے" یعنی اس شکل کے لئے جو منحنی $ر^۲ = ا^۲ جم\ طہ$ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے ذیل کے خواص ثابت کرو

(۱) اس کا حجم $\frac{۴}{۱۵}\, \pi\, ا^۳$ ہے۔

(۲) زیادہ سے زیادہ عرض ۰٫۸۴۰۴ ا ہے مبدأ سے ۰٫۴۳۸۹ ا فاصلہ پر۔

(۳) حجم کا اوسط مرکز قطب سے $\frac{۱۵}{۳۲}$ ا فاصلہ پر ہے۔

۲۰۔ کسی منحنی کا "قطبی زیر مماس" وہ طول ہے جو قطب میں سے گزرنے والے خط پر جو سمتی نیم قطر پر عمود دار ہو، مماس کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طول $ر^۲ \frac{فرطہ}{فرر}$ ہے۔ ثابت کرو کہ منکافی لولب میں قطبی زیر مماس مستقل ہوتا ہے۔

۲۱۔ نیم قطر ا کا دائرہ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکے دریچہ کی مماسی قطبی مساوات ہے $ع^۲ = ر^۲ - ا^۲$ جہاں مرکز قطب ہے۔

۲۲۔ ارشمیدس کے لولب (شکل ۱۱۱) میں ثابت کرو کہ $ع^۲ = \frac{ر^۴}{ا^۲ + ر^۲}$

۲۳۔ منکافی لولب (شکل ۹۷) میں ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱}{ر^۲} + \frac{۱}{ا^۲}$

۲۴۔ منحنی $ر = \frac{ا}{جم\ م\ طہ}$ میں ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱ - م^۲}{ر^۲} + \frac{م^۲}{ا^۲}$

۲۵۔ ان منحنیات $ر = \frac{ا}{جمز\ م\ طہ}$، $ر = \frac{ا}{جیز\ م\ طہ}$ میں ثابت کرو کہ بالترتیب

$$\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱ + م^۲}{ر^۲} \mp \frac{م^۲}{ا^۲}$$

۲۶۔ بر تدویر (دفعہ ۱۲۳) میں ثابت کرو کہ $ر^۲ = ا^۲ + \frac{۴(ا+ب)ب}{(ا+۲ب)^۲}\, ع^۲$ ۲۲۰

در تدویر کے لئے متناظر ضابطہ کیا ہے۔

۲۷۔ کارٹیزی مساوات اس منحنی کی دریافت کرو جسمیں $ع = ا جب\ سا جم\ سا \left[لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}} \right]$

۲۸- اُس منحنی کی قطبی مساوات دریافت کرو جس میں $ع^2 = \frac{4 ر^6}{ر^4 + 3 ر^2}$

۲۹- ایک منحنی کی مماسی قطبی مساوات دی ہوئی ہے، اسکی قوس کے لئے ضابطہ

$س = \int \frac{ر فر ر}{\sqrt{ر^2 - ع^2}}$ ثابت کرو۔

۳۰- ضابطہ $ع فر س = ۲ فر ط$ ثابت کرو اور اسکی ہندسی تعبیر بیان کرو۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر وہ رقبہ جو کسی متحرک نقطہ کا سمتی نیم قطر عبور کرتا ہے وقت کے ساتھ یکسان طور پر بڑھے تو نقطہ کی رفتار اس عمود کے بالعکس متناسب ہوگی جو مبدأ سے راستہ کے مماس پر کھینچا جائے۔

امثلہ ۴۵

مربوط منحنی۔ دو قطبی محدد

۱- مساوی الزاویہ لولب کا مقلوب بلحاظ قطب کے ایک مساوی لولب ہے۔

۲- قطع زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے، مرکز پر ایک نقطہ رکھتا ہے۔

۳- قائم زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۴- قطبی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے قطب میں سے گزرتا ہے اور برعکس اسکے۔

۵- قطبی مساوات کے مدد سے ثابت کرو کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے۔

۶- قطع مکافی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے خد صنوبری ہے۔

کسی مخروطی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے گھونگا منحنی ہے۔

۷- ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کا مقلوب بلحاظ مرکز کے منحنی

$(لا^2 + ما^2)^2 = م^4 \left(\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2}\right)$ ہے۔

۳۳۱

نیز ثابت کروکہ جہاں منحنی محور لا کو کاٹتا ہے وہاں پر منحنی مبدأ کی جانب مقعر یا محدب ہوگا بموجب اسکے کہ ب^۲ ≷ ۲ ا^۲ ۔

۸ ۔ خط صنوبری قطع مکافی کا مقلوب ہے بلحاظ ماسکہ کے ۔ اس امر کو استعمال کرنے سے یا کسی اور طرح سے ثابت کروکہ قرن میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے تقاطع کو قرن کے ساتھ ملانیوالا خط وتر پر عمود وار ہوتا ہے ۔

۹ ۔ تقلیب سے یا کسی اور طرح سے ثابت کروکہ صنوبری خطوط
ر = ا (۱ + جم طہ)، ر = ب (۱ - جم طہ) ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں ۔

۱۰ ۔ منحنی اور اسکے مقلوب کے متناظر عنصر فرس، فرسَ ہیں، ثابت کروکہ
فرس : فرسَ = ر^۲ : م^۲ = م^۲ : رَ^۲ جہاں ر، رَ سمتی نیم قطر ہیں ۔

۱۱ ۔ قطع مکافی کا پائیں منحنی بلحاظ راس کے لبلابی خط (Cissoid) [دفعہ ۱۱۹ (۱۶)] ہے ۔

۱۲ ۔ اگر ایک منحنی کے دو مماس ایک دوسرے سے مستقل زاویہ بنائیں تو ان کے نقطہ تقاطع (پ) کا طریق پ اور دو نقاط تماس میں سے گذرنے والے دائرہ کو مس کرتا ہے ۔

۱۳ ۔ ثابت کروکہ پائیں منحنی کا رقبہ اس ضابطہ $\frac{1}{2} \int$ ع^۲ فرسا سے حاصل ہوتا ہے ۔

۱۴ ۔ ثابت کروکہ پائیں کی قوس اس ضابطہ $\int$ ر فرسا سے حاصل ہوتی ہے ۔

۱۵ ۔ قطع ناقص کے پائیں منحنی کا رقبہ ہے $\frac{1}{2}$ π (ا^۲ + ب^۲) جبکہ مرکز قطب ہو اور ا، ب نیم محور ہوں ۔

۱۶ ۔ قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کا پائیں منحنی بلحاظ مرکز کے دو حلقوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ا ب + $\frac{1}{2}$ (ا^۲ - ب^۲) مس^۱- $\frac{ا}{ب}$ ہے ۔

۱۷ ۔ اگر (قائم) محددوں کے مبدأ سے اور نقطہ (لا₁، ما₁) سے منحنی کے مماس پر عمود ع اور عَ کھینچے جائیں تو ثابت کروکہ

$$ع_۱ = ع - لا_۱ \text{ جم } سا - ما_۱ \text{ جب } سا$$

جہاں سا عمودوں کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔

۳۴۲ ۱۸۔ ایک بند بیضوی منحنی کے دو پایئں منحنی بلحاظ سدا و اور ایک نقطہ (لا، ما) کے ہیں جبکہ یہ دونوں نقطے منحنی کے اندر واقع ہیں۔ ان پایئں منحنیوں کے رقبے ا، ا۱ ہیں، ثابت کرو کہ

$$ا_۱ = ا - لا_۱ \int_۰^{۲\pi} ع \text{ جم } سا \, ف سا - ما_۱ \int_۰^{۲\pi} ع \text{ جب } سا \, ف سا + \frac{۱}{۲}\pi (لا_۱^۲ + ما_۱^۲)$$

۱۹۔ ایک نقطہ کو قطب مانکر اگر ایک بند بیضوی منحنی کا پایئں منحنی لیا جائے تو اس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے، ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ کا طریق دائرہ ہے۔ اور مستقل کی مختلف قیمتوں کے جواب میں جو دائرے حاصل ہوتے ہیں وہ ہم مرکز ہیں۔

نیز اگر و مشترک مرکز ہو تو بلحاظ کسی اور نقطہ پ کے جو پایئں منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا رقبہ اس پایئں منحنی کے رقبہ سے جو بلحاظ و کے لیا جائے بقدر دائرہ (نیم قطر و پ) کے رقبہ کے زیادہ ہوتا ہے۔

۲۰۔ مکافی $ما^۲ = ۴ الا$ کا منفی پایئں بلحاظ راس کے منحنی $۲۷ ا ما^۲ = (لا - ۴ ا)^۳$ ہے۔

۲۱۔ کس صورت میں $ع = ا \text{ جم } سا$ ؟

۲۲۔ ثابت کرو کہ جس منحنی کی صورت میں $ع = ا \text{ جب } سا \text{ جم } سا$ وہ ستارہ نما $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$ ہے۔

۲۳۔ بتاؤ کہ مساوات $ر^۲ + ر'^۲ = م^۲$ (مستقل) کو بلحاظ قوس (س) کے تفرق کرنے سے کیا خاصیت حاصل ہوتی ہے اور نتیجہ کی ہندسی طریق پر تصدیق کرو۔

۲۴۔ کیسینی کے بیضوی کے کسی نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا یہ عمل ثابت کرو۔ پ س اور پ سَ میں بالترتیب نقطے ق اور قَ لو ایسے کہ پ ق = پ سَ اور پ قَ = پ س۔ جو خط پ کو ق قَ کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملاتا ہے وہ مطلوبہ عماد ہے۔

۲۵ ۔ متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مطلوب ہے کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے، ثابت کرو کہ انعکاسی منحنی قطع مکافی ہے ۔

۲۶ ۔ متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعطف ہونا مقصود ہے کہ انعطاف کے بعد شعاعیں ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں ۔ ثابت کرو کہ انعطافی منحنی ایک مخروطی تراش ہے اور مخروطی کا خروج المرکز انعطاف نماؤں کی نسبت کے مساوی ہے ۔

۲۷ ۔ ثابت کرو کہ کارتیزی بیضوی کی مساوات اس شکل کی ہے

ر^{2} − ۲ (ا + ب جم ﻄہ) ر + ج^{2} = ۰

جہاں کسی ماسکہ کو قطب مانا گیا ہے ۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ کارتیزی بیضوی لازماً ایک بند منحنی ہوگا اگر اس صورت کو جس میں منحنی قطع زائد کی ایک شاخ ہے مستثنیٰ کر دیا جائے ۔

دسواں باب

انحنا

۱۳۴۔ انحنا کا ناپ ۔ مستوی منحنیات کے نظریہ میں احصا کا جو استعمال ہے اس کے متعلق ابتک ہمیں منحنی کے مختلف نقاط پر مماس کی سمت کے ساتھ ہی سروکار رہا ہے، ابھی خاص طور پر ہم نے اس پر غور نہیں کیا کہ کس طرح نقطہ بہ نقطہ یہ سمت منحنی پر بدلتی ہے۔

انحنا کا مضمون کئی غیر متعلق پہلوؤں سے بحث میں لایا جا سکتا ہے اور اگرچہ تمام طریقوں سے بالکل وہی ضابطے حاصل ہوتے ہیں تاہم طالب علم کے لئے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اساسی طور پر استدلال میں وہ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔

*پہلے طریقہ میں ہم منحنی کی کسی قوس کے "پورے" یا "مکمل" انحنا کی تعریف سے ابتدا کرتے ہیں، پورا انحنا وہ زاویہ مف سا ہے جس میں سے مماس گھوم جاتا ہے جبکہ اس کا نقطہ تماس قوس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک سفر کرتا ہے۔

اور قوس کا "اوسط انحنا" اُس نسبت سے متعین ہوتا ہے جو پورے انحنا کو قوس کے طول (مف س) سے ہو پس اس تعریف کے مطابق اوسط انحنا $\frac{\text{مف سا}}{\text{مف س}}$ ہے۔

* اور طریقے دفعات ۱۳۶، ۱۳۷ میں بیان کئے گئے ہیں۔

اور تعریف کے طور پر منحنی کے "کسی نقطہ پ پر کا انحنا" اس لاانتہا چھوٹی قوس کا اوسط انحنا خیال کیا جاتا ہے جو اس نقطہ پر منتہی ہوتی ہے۔
پس احصا کی ترقیم کے مطابق کسی نقطہ پر کا انحنا

$$\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$ سے تعبیر ہوگا۔

ایک دائرہ کیلئے جس کا نیم قطر ر ہو مف س = ر مف سا

اور اس لئے $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{1}{\text{ر}}$ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دائرہ کا انحنا اس کے نیم قطر کے منکافی سے ناپا جاتا ہے۔ پس اگر ایک دائرہ کا نیم قطر س ہو جس کا انحنا وہی ہے جو کسی دئے ہوئے منحنی کا نقطہ پ پر ہے تو

$$\text{س} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

۳۴۴ اس نیم قطر (س) کے دائرہ کو جس کا مماس نقطہ پ پر وہی ہو اور جس کا تقعر اسی سمت میں ہو جو اصلی منحنی کا ہے ہم "دائرہ انحنا" کہینگے، اس کے نیم قطر کو "نیم قطر انحنا" کہا جائیگا اور اس کے مرکز کو "انحنا کا مرکز"۔
اگر منحنی کے نقطہ پ سے کسی خاص سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے تو اس خط پر جو طول یہ دائرہ قطع کرتا ہے اسے اس سمت میں کے "وتر انحنا" کے نام سے موسوم کیا جائیگا۔ اگر وتر کی سمت عماد کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو وتر کا طول ل اس مساوات سے حاصل ہوگا

$$\text{ل} = ۲\,\text{س}\,\text{جم}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

اگر انحنا کے مرکز کے قائم محدد (ضا، عا) ہوں تو قائم ظل ڈالنے سے

$$\text{ضا} = \text{لا} - \text{س}\,\text{جب}\,\text{سا}،\ \text{عا} = \text{ما} + \text{س}\,\text{جم}\,\text{سا} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

بشرطیکہ سا کا صفر اس مقام سے شروع ہو جہاں مماس لا کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔
انحنا کا مرکز منحنی کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

منحنی کے دو متصل نقاط پر پ ج ' پ ج دو عماد ہیں اور ان کے درمیان زاویہ
مف سا ہے اور قوس پ پ ' مف س ہے ' تب وتر پ پ
کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (شکل ۱۰۷)

$$\frac{\text{ج پ}}{\text{پ پ}} = \frac{\text{جب ج پ پ}}{\text{جب مف سا}}$$

$$\therefore \text{ج پ} = \text{جب ج پ پ} \times \frac{\text{پ پ}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف سا}}{\text{جب مف سا}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$$

جب پ ' کو پ کے لاانتہا قریب لیا جائے تو بائیں جانب کے ہر جزو ضربی
کی انتہا ایک ہوتی ہے سوائے $\frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$ کی انتہا کے۔ پس آخرالامر

$$\text{ج پ} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}} = \text{ن}$$

شکل (۱۰۷)

جدید ہندسہ میں ہم یوں خیال کرتے ہیں کہ منحنی کی تکوین دو طرح سے عمل میں
آتی ہے۔ ایک تو یہ ایک نقطہ کا طریق ہو سکتا ہے ' دوسرے یہ ایک خط مستقیم کا
لفاف ہو سکتا ہے (دفعہ ۱۴۱)۔ حرکت کے ان متعلق عنصروں کے کسی مسلسل

تواتر پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم کسی آن میں نقطہ کے گرد حرکت کر رہا ہے اور یہ نقطہ خط مستقیم پر سفر کر رہا ہے اور انحنا $\frac{فر سا}{فر س}$ ان دو حرکتوں کے باہمی رشتہ کو بیان کرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ پر انحنا صفر ہے تو مماس کا گھماؤ ایک لمحہ کے لئے رک جاتا ہے اور "ساکن یا اچل مماس" کی صورت پیدا ہوتی ہے۔ اسکی سادہ ترین مثال "نقطہ انعطاف" کی ہے (دفعہ ۶۷) جہاں پر مماس کے گھماؤ کی سمت "رکنے کے بعد" الٹ جاتی ہے۔

۳۲۵ اگر کسی نقطہ پر نیم قطر انحنا ($\frac{فر س}{فر سا}$) صفر ہو جائے تو نقطہ کی حرکت خط مستقیم پر ایک لمحہ کے لئے رک جاتی ہے اور "ساکن یا اچل نقطہ" پیدا ہوتا ہے۔ اس کی سادہ مثال ایک "قرن" ہے جیسا ہم نے اشکال ۶۷، ۶۹، ۸۲ وغیرہ میں دیکھا ہے۔ ایسی صورتوں میں نقطہ کی حرکت کی سمت رکنے کے بعد الٹ جاتی ہے۔ دفعہ ۱۱۹ کی مثالوں میں ہم نے دیکھا تھا کہ قرن ایک حلقہ کے معدوم ہونے سے پیدا ہوتا ہے۔ یہ اس امر کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ ہے کہ نصف قطر انحنا کو یہاں پر کیوں صفر ہونا چاہئے۔

علم حرکت اور طبعیات کے مسائل میں انحنا کا تخیل بہت اہمیت رکھتا ہے، مثلاً علم حرکت میں اگر ایک متحرک ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کو بالترتیب دو اجزا میں تحلیل کیا جائے ایک مماس کی سمت میں اور دوسرے عماد کی سمت میں تو پہلا جزو رفتار پر اثر رکھتا ہے اور دوسرا حرکت کی سمت پر۔ اگر ایک ثابت مبدا سے و ص سمتی (Vector) کھینچا جائے جو کسی آن میں ذرہ کی رفتار کو تعبیر کرے تو ص کے قطبی محدد ع اور سا لئے جا سکتے ہیں جہاں $ع = \frac{فر س}{فر ت}$۔ اس طرح ص کی قطری اور عمودی رفتاریں بالترتیب ہونگی (دفعہ ۱۱۲ (۶))

$$\frac{فر ع}{فر ت} \text{ اور } ع \frac{فر سا}{فر ت} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اور یہ رفتار میں تغیر کی شرحیں ہیں ذرہ کے مدار کے مماس اور عماد کی سمت میں

اور چونکہ $\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{ع^2}{ر}$ ......(۶)

یہ آخر کا جزو ترکیبی 'رفتار کے مربع اور انحنا کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۳۴۔ **منحنی کی ذاتی مساوات۔** ضابطہ $ر = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}}$ فوراً لگ سکتا ہے اگر منحنی زیر بحث کے لئے س اور سا کا باہمی رشتہ اس شکل میں معلوم ہو

$$س = ف(سا) \quad ......(۲)$$

یہ منحنی کی "ذاتی مساوات" کہلاتی ہے کیونکہ اسکی شکل میں منحنی کے باہر کے مکانی عنصر شریک نہیں ہوتے۔ اس میں اختیاری عنصر صرف س کا مبدا اور سا کا مبدا ہیں اور ان میں سے کسی ایک میں تبدیلی کا اثر صرف یہ ہوگا کہ متناظر متغیر میں ایک مستقل کا اضافہ ہو جائیگا۔

اگر منحنی کی ذاتی مساوات معلوم نہ ہو تو دفعہ ۱۳۵ کا کوئی ایک ضابطہ استعمال ہو سکتا ہے یا خاص صورتوں میں خاص ترکیبیں عمل میں لائی جاسکتی ہیں دیکھو ذیل کی مثالیں ۴ اور ۵۔

مثال ۱۔ زنجیرہ میں

$$س = ا \text{ ممس } سا \quad ......(۳)$$

جس سے $ر = ا \text{ قط}^2 سا = ما \text{ قط } سا$ ......(۴)

دفعہ ۱۲۰ کی ترقیم کے موافق۔ اس دفعہ کی شکل کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ نیم قطر انحنا عماد پ گ کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ خط تدویر (cycloid) (دفعہ ۱۲۲) میں

$$س = ۴ ا \text{ جب } سا \quad ......(۵)$$

اور اس لئے $ر = ۴ ا \text{ جم } سا$ ......(۶)

اس لئے شکل ۹۰ میں $ر = ۲$ پ ے یعنی انحنا کا نیم قطر عماد کا دو چند ہے۔

مثال ۳ - برندویر (Epicycloid.) دفعہ ۱۲۳ (۱۱) میں

$$س = \frac{۴(ا + ب)ب}{ا} \text{ جب } \frac{ا}{ا+۲ب} سا \quad \ldots\ldots (۷)$$

اور اس لئے $ر = \frac{۴(ا+ب)ب}{ا+۲ب} \text{ جم } \frac{ا}{ا+۲ب} سا$

$$= \frac{۴(ا+ب)ب}{ا+۲ب} \text{ جم } \frac{فہ}{۲} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اِس لئے شکل ۸۱ (دفعہ ۱۲۳) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ

$$ر = \frac{۲(ا+ب)}{ا+۲ب} \text{ پ سے } \quad \ldots\ldots (۹)$$

جہاں پ سے عماد کا طول ہے مرتسم نقطہ اور ثابت دائرہ کے درمیان۔

مثال ۴ - مکافی $ما^۲ = ۴ا لا$ میں $ما = ۲ا \text{ جم سا} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

جس سے جب سا $= \frac{فرما}{فرس} = - \frac{۲ا}{\text{جب}^۲ سا} \cdot \frac{فرسا}{فرس}$

$$\text{یا } ر = - \frac{۲ا}{\text{جب}^۲ سا} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

منفی علامت کا یہ مفہوم ہے کہ سا گھٹتا ہے جیسے س بڑھتا ہے۔

مثال ۵ - اگر قطع ناقص $لا = ا \text{ جم فہ}، ما = ب \text{ جب فہ} \quad \ldots\ldots (۱۲)$

کو دائرہ $لا = ا \text{ جم فہ}، ما = ا \text{ جب فہ} \quad \ldots\ldots (۱۳)$

کا قائم ظل تصور کیا جائے تو $\frac{فرس}{فرفہ} = بہ \quad \ldots\ldots (۱۴)$

جہاں بہ مزدوج نیم قطر ہے۔ کیونکہ قوس کا عنصر ا مف فہ سے بدلکر مف س ہو جاتا ہے اور متوازی نیم قطر ا سے بدلکر بہ ہو جاتا ہے۔ نیز چونکہ $\frac{۱}{۲} بہ^۲$ مف سا اور $\frac{۱}{۲} ا^۲$ مف فہ رقبہ کے متناظر عنصر ہیں اس لئے

$$بہ^۲ \text{ مف سا} = \frac{ب}{ا} ا^۲ \text{ مف فہ}$$

یا $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^2}{\text{ا ب}}$ .... (۱۵)

اسلئے $ر = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}} \times \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^3}{\text{اب}}$ .... (۱۶)

اگر مماسی خط پر مرکز سے عمود ع ہو تو ع بہ = اب اور اوپر کا نتیجہ اِس طور پر لکھا جا سکتا ہے

$ر = \frac{\text{بہ}^2}{\text{ع}}$ یا $ر = \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$ .... (۱۷)

چونکہ $\text{ع}^2 = \text{ا}^2\text{جم}^2\text{سا} + \text{ب}^2\text{جب}^2\text{سا} = \text{ا}^2(\text{ا} - \text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا})$

موخر الذکر صورت اِس شکل کے معادل ہے (ز خروج المرکز ہے)

$ر = \text{ا}\frac{\text{ا} - \text{ز}^2}{(\text{ا} - \text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا})^{\frac{3}{2}}}$ .... (۱۸)

اِس ضابطہ سے ارضیات (Geodesy) میں ایک مشہور نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر زمین کی شکل کو گردشی کا ناقص نما خیال کیا جائے تو ز^4 کو نظر انداز کرنے سے عرض بلد سا کی رقوم میں نیم قطر انحنا کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ا}(\text{ا} - \text{ز}^2 + \frac{3}{2}\text{ز}^2\text{جب}^2\text{سا}) = \text{ا}(\text{ا} - \frac{\text{صہ}}{2} - \frac{3}{2}\text{صہ جم}2\text{سا})$ .... (۱۹)

جہاں $\text{صہ} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} = \frac{1}{2}\text{ز}^2$ یعنی صہ سے نصف النہار کی ناقصیت (Ellipticity) تعبیر ہوتی ہے، (۱۹) کو تکمل کرنے سے نصف النہار کی قوس کا طول، استواء سے عرض بلد سا تک حاصل ہوتا ہے

$\text{س} = \text{ا}(\text{ا} - \frac{\text{صہ}}{2})\text{سا} - \frac{3}{4}\text{ا صہ جب}2\text{سا}$ .... (۲۰)

مثال ۲ ـ مساوی الزاویہ لولبی (دفعہ ۱۲۶) میں

$$سا = طہ + عہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

اِس سے
$$\frac{فرسا}{فرس} = \frac{فرطہ}{فرس} = \frac{جب\ عہ}{ر}$$

$$یا\quad ٰر = \frac{ر}{جب\ عہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

پس نیم قطر انحنا کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۵۔ نیم قطر انحنا کے لئے ضابطے۔ انحنا کا ضابطہ $\frac{فرسا}{فرس}$ آسانی سے کئی اور صورتوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) قائم کارتیزی محددوں میں

$$مس\ سا = \frac{فرما}{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$اسلئے\ قط^۲ سا \frac{فرسا}{فرس} = \frac{فر}{فرس}\left(\frac{فرما}{فرلا}\right) = \frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲} \cdot \frac{فرلا}{فرس} = جم\ سا \frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲}$$

$$جس\ سے\quad \frac{۱}{ٰر} = \frac{\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲}}{\left\{۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲\right\}^{\frac{۳}{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اِس شکل سے پھر ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر، جہاں $\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲} = ۰$ (دفعہ ۶۷) انحنا صفر ہوتا ہے۔

جب، $\frac{فرما}{فرلا}$ ایک چھوٹی مقدار ہو تو ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے تقریباً

$$\frac{۱}{ٰر} = \frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور تناسبی خطا انہیں دوسرے رتبہ کی ہو گی۔ صریحاً یہ ضابطہ $\frac{فر سا}{فر س}$ کی نقل ہے کیونکہ جب سا چھوٹا ہو تو سا کی بجائے $\frac{فر ما}{فر ۱/۱}$ (= مس سا) لکھا جا سکتا ہے اور $\frac{فر}{فر س}$ کی بجائے $\frac{فر}{فر ۱/۱}$ ۔ سلاخوں کی خمیدگی کے نظریہ میں اس ضابطہ کا استعمال بہت اہمیت رکھتا ہے۔

(۲) دفعہ ۱۳۱ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ نیم قطر کا ظل (ص) مماس پر حاصل ہوتا ہے

$$ص = \frac{فر ع}{فر سا} \quad \dots\dots\dots\dots (۴)$$

اگر مبدأ سے دو متصل عمادوں پ ج، پَ ج پر عمود و ع، و عَ ہوں اور اگر و عَ پ ج سے ن پر ملے تو بالآخر

و عَ ۔ و ع = عَ ن = ج ن مف سا یا مف ص = ج ن مف سا

شکل (۱۰۸)

۳۳۹　اِس لئے ج ع یا ج ن کی انتہائی قیمت $\frac{فر ص}{فر سا}$ ہے جس سے

$$ر = ج پ = و ے + ج ء = ع + \frac{فرص}{فرسا} = ع + \frac{فر^۲ع}{فرسا^۲} \quad \ldots (۵)$$

(۳) دفعہ ۱۱۲ کی ترقیم کے موافق

$$\frac{ص}{ر} = جمم فہ = \frac{فرر}{فرس} \quad \ldots (۶)$$

چونکہ $\frac{فرس}{فرسا} = \frac{فرس}{فرر} \times \frac{فرر}{فرع}$ ، $\frac{فرع}{فرسا} = ص \frac{فرس}{فرر} \times \frac{فرر}{فرع}$

اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$ر = \frac{ر\, فرر}{فرع} \quad \ldots (۷)$$

یہ ضابطہ بڑی سہولت سے استعمال ہو سکتا ہے جب مماسی قطبی مساوات (دفعہ ۱۲۹) معلوم ہو۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $ع = ا\, جمز \frac{لا}{ا} \quad \ldots (۸)$

کی صورت میں

$$\frac{فرع}{فرلا} = جبز \frac{لا}{ا}\text{، } \frac{فر^۲ع}{فرلا^۲} = \frac{۱}{ا} جمز \frac{لا}{ا}\text{، } ۱ + \left(\frac{فرع}{فرلا}\right)^۲ = جمز^۲ \frac{لا}{ا}$$

اِس لئے $ر = ا\, جمز^۲ \left(\frac{لا}{ا}\right) = \frac{ع^۲}{ا} \quad \ldots (۹)$

چونکہ ع = ا قطسا، اِس لئے نتیجہ (۹) دفعہ ۱۳۴ مثال ۱ کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ مکافی میں $ر = \frac{ع^۲}{ا} \quad \ldots (۱۰)$

$$ر = \frac{ر\, فرر}{فرع} = \frac{۲ع^۳}{ا^۲} = \frac{۲ر^{\frac{۳}{۲}}}{ا^{\frac{۱}{۲}}} \quad \ldots (۱۱)$$

مثال ۳۔ مرکز دار تراشوں میں (دفعہ ۱۲۹، مثال ۴)

$$\frac{ا^2 ب^2}{ج^2} = ب^2 \pm ا^2 \mp ر^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

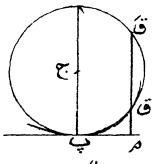
$$\text{اس لئے} \quad ر = \pm \frac{ا^2 ب^2}{ج^3} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۴ مثال ۵ -

۱۳۶ - نیوٹن کا طریقہ - انحنا پر بحث کرنے کا ایک اور طریقہ ہے جسے نیوٹن* نے استعمال کیا - اس میں ایک دائرہ کھینچا جاتا ہے جو منحنی کو پ پر مس کرتا ہے اور ایک پاس کے نقطہ ق میں سے گذرتا ہے - اس کے بعد اس دائرہ کے نیم قطر کی انتہائی قیمت معلوم کیجاتی ہے جبکہ ق، پ کے لا انتہا قریب آجائے -

۳۴۰ یہ باسانی ثابت ہوسکتا ہے کہ انتہا میں یہ دائرہ بالکل وہی ہے جو پ پر کا انحنا کا دائرہ ہے اور جس کی تعریف دفعہ ۱۳۳ میں کی گئی ہے

شکل (۱۰۹)

کیونکہ اگر ج مرکز ہو تو ج پ = ج ق اور اس لئے پ اور ق کے

* Principia, lib I, prop VI Cor 3.

درمیان کوئی نقطہ پ ایسا ضرور ہوگا کہ اس کا فاصلہ ج سے اعظم یا اقل ہو اور اسلئے* ایسا کہ ج پ منحنی کا عماد ہو۔ انتہا میں پ' پ کے لاانتہا قریب آجاتا ہے اور ج متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع "مرکز انحنا" پر منطبق ہوتا ہے۔

نیوٹن کے طریقہ سے نیم قطر انحنا کے لئے ایک نہایت سادہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ پ پر کے مماس پر ق' ق م ایک عمود کھینچا گیا ہے جو دائرہ سے پھر ق' پر اور مماس سے م پر ملتا ہے۔ چونکہ

مپ^2 = مق × مق' اس لئے

۲ ر = نہا مق' = نہا $\frac{\text{مپ}^2}{\text{مق}}$ ..... (۱)

اگر ق' ق م کو اس طور پر کھینچا جائے کہ یہ پ پر کے عماد کے متوازی ہونے کی بجائے اس عماد کے ساتھ ایک معلومہ میلان رکھے تو کسر (۱) کی انتہائی قیمت سے مائل سمت میں وتر انحنا حاصل ہوگا۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ کسی خاص سمت میں وتر انحنا خاص سہولت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے، اس کے بعد نیم قطر انحنا ضابطہ (۳) دفعہ ۱۳۳ سے حاصل ہو سکیگا۔

مثلاً کارٹیزی محددوں میں نیم قطر انحنا کے لئے ضابطہ مستنبط ہو سکتا ہے بحوالہ شکل ۴۲ صفحہ (۲۱۳) محور ما کے متوازی وتر انحنا کو ق سے تعبیر کرو

تو $\frac{1}{\text{ق}}$ = نہا $\frac{\text{ق ع}}{\text{پ ع}^2}$ = نہا $\frac{\text{ق ا ع}}{\text{ا ج}^2}$ جم^2 سا

= $\frac{1}{2}$ فتا (ل) جم^2 سا .... (۲)

جہاں سا، پ پر کے مماس کا میلان محور سا کے ساتھ ہے۔

چونکہ ق = ۲ر جم سا، مس سا = فتا (ل)

اِس لئے حاصل ہوتا ہے کہ

---

* دیکھو دفعہ ۶۳ مثال ۲۔

$$\frac{1}{ر} = فَ''(ا) جم^3 سا = \frac{فَ''(ا)}{[1 + \{فَ'(ا)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (3)$$

اور یہ ضابطہ (۲) دفعہ ۱۲۵ کے بالکل مطابق ہے' صرف ترقیم کا فرق ہے۔

۴۲۱ مثال ۱۔ قطع مکافی میں فرض کرو کہ وتر ق ط ' پ پر کے مماس کے متوازی ہے اور پ میں سے گذرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے (شکل ۱۱۰) تو مخروطی کے ہندسہ کی رو سے

$$ق ص^2 = 4 س پ \times پ ص$$

شکل (۱۱۰)

جہاں س ماسکہ ہے۔ اس لئے محور کے متوازی وتر انحنا ق کے لئے

$$ق = نہا \frac{ق ص^2}{پ ص} = 4 س پ \quad \ldots\ldots (4)$$

اگر پ پر کا عماد محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو $جم طہ = \frac{س ے}{س پ}$

جہاں س ے ماسکہ سے پ پر کے مماس پر عمود ہے' اسلئے

$$ر = \frac{1}{2} ق قط طہ = 2 \frac{س پ^2}{س ے} = 2 \frac{س پ^{\frac{3}{2}}}{س ا^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (5)$$

کیونکہ س ے^2 = س ا × س پ جہاں ا رائس ہے۔

مثال ۲- قطع ناقص (یا زاید) میں قطر پ ج پَ کے کسی ایک سرے پر کے مماس کے متوازی وتر ق ط کھینچا گیا ہے اور یہ اس قطر سے ص پر ملتا ہے تو

ق ص^2 : پ ص × ص پَ = ج د^2 : ج پ^2

شکل (۱۱۱)

جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے۔ اسلئے مرکز میں سے گذرنیوالے وتر انحنا (ق) کیلئے

$$ق = نہا \frac{ق ص^2}{پ ص} = نہا \frac{ج د^2}{ج پ^2} × ص پَ$$

$$= \frac{۲ ج د^2}{ج پ} \quad ....(۶)$$

اگر مرکز سے پ پر کے مماس پر عمود ج ے ہو اور ج پ عماد کے ساتھ زاویہ

طہ بنائے تو جم طہ = $\frac{ج ے}{ج پ}$ اور اس لئے

$$ر = \frac{۱}{۲} ق قط طہ = \frac{ج د^2}{ج ے} \quad ....(۷)$$

جو دفعہ ۱۳۴ (۱۷) کے مطابق ہے۔

اگر پ کے کسی ماسکی فاصلہ کا زاویہ پ پر کے عماد کے ساتھ طہ ہو تو ہم

جانتے ہیں کہ جم طہ = $\frac{\text{ج ے}}{\text{ج ا}}$ جہاں ا محور اعظم کا سرا ہے۔ اس لئے
کسی ایک ماسکہ میں سے گذرنے والا وتر انحنا (قَ) حاصل ہوتا ہے

$$\text{قَ} = \text{۲ ر جم طہ} = ۲\,\frac{\text{ج دَ}^{۲}}{\text{ج ا}} \qquad ......\ (۸)$$

مثال ۳ ۔ خط تدویر لا = ا (طہ + جب طہ)، ما = ا (ا − جم طہ) .... (۹)
کے راس پر نیم قطر انحنا (ر) دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}'^{۲}}{\text{۲ ما}'} = \text{ا}\,(\text{طہ} + \text{جب طہ})^{۲} \div \text{۴ جب}^{۲}\,\frac{\text{طہ}}{۲} = \text{ا}\left(۱ + \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\right)^{۲} \div \left(\frac{\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۲}}{\frac{\text{طہ}}{۲}}\right)^{۲}$$

اس سے

$$\text{ر} = \text{نہا}_{\text{طہ}\to ۰}\ \frac{\text{لا}'^{۲}}{\text{۲ ما}'} = \text{۴ ا} \qquad ......\ (۱۰)$$

۱۳۷ ۔ لثمی دائرہ (Osculating circle) ۔

انحنا پر بحث کرنے کا ذرا مختلف طریقہ "لثمی دائرہ" کے تخیل پر مبنی ہے۔ اگر منحنی پر پ کے قریب دو نقطے ق اور ط ہوں جہاں* ایک نقطہ پ کے ایک طرف واقع ہے اور دوسرا دوسری طرف تو دائرہ پ ق ط کے نیم قطر کی انتہائی قیمت پر ہم غور کرتے ہیں جبکہ ق اور ط دونوں پ کے لاانتہا قریب آجاتے ہیں۔

اگر منحنی زیر بحث کا انحنا پ پر مسلسل ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دائرہ انتہا میں "دائرہ انحنا" پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ج ہو تو پ اور ق کے درمیان ایسا نقطہ پَ ضرور ہوگا کہ ج پَ معلومہ منحنی پر عماد ہو اور اسی طرح ایک نقطہ پً نقاط پ اور ط کے درمیان ایسا ہوگا کہ ج پً منحنی پر عماد ہو۔ فرض کرو کہ پَ ج اور پً ج

* یہ شرط ضروری نہیں لیکن اس سے ثبوت میں سہولت پیدا ہوتی ہے اور دیگر معمولی شرطیں اس سے پوری ہوتی ہیں۔

نقطہ پ کے عماد سے بالترتیب ج' اور ج'' پر ملتے ہیں۔ شرط مذکورۂ بالا کی رو سے

شکل (۱۱۲)

ج' اور ج'' آخرالامر پ پر کے مرکز انحنا پر منطبق ہوں گے اور چونکہ ج' < ج < ج''
اس لئے ج بوجوہ مستحکمہ آخرالامر اس نقطہ پر منطبق ہوگا۔

۲۴۳

چونکہ انتہا سے پہلے، دائرہ پ ق ط ڈ ئے ہوئے منحنی کو پ کی پڑوس میں تین دفعہ عبور کرتا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تماسی دائرہ عام طور پر منحنی کو نقطہ تماس پر عبور کریگا، دیکھو شکل ۱۱۲ صفحہ (۴۶۹)۔

اگر شکل ۱۴ حصۂ اول صفحہ (۲۱۰) میں ق، نقاط پ، ق، پ میں سے

گذرنے والے دائرہ سے دوبارہ ع پر ملے تو ع ع = $\frac{\text{پ ع}'}{\text{ق ع}'}$

اس لئے منحنی ما = فہ (لا) کے اس وتر انحنا کے لئے جو محور ما کے متوازی ہے

$\frac{1}{\text{ق}}$ = نہا $\frac{\text{ق ع}}{\text{پ ع}^2}$ = نہا $\frac{\text{ق ع}}{\text{ح}^2}$ جم^2 سا = $\frac{1}{2}$ فہ''(ا) جم^2 سا

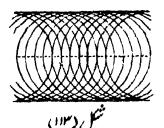
جیسا دفعہ ۱۲۶ (۲) میں ثابت کیا گیا۔

مثال۔ اگر شکل ۱۱۰ میں دائرہ پ ق ط، پ ص سے ع پر ملے تو
ق ص × ص ط = پ ص × ص ع اور اس لئے ص ع = ۴ س پ
اس سے معلوم ہوا کہ انحنا کا وتر قطع مکافی کے محور کے متوازی ۴ س پ ہے۔
اسی طرح کا استدلال قطع ناقص کی صورت میں، مرکز میں سے گذرنے والا وتر انحنا دریافت کرنے کیلئے

استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۸۔ لفاف۔ فرض کرو کہ منحنیات کا ایک واحد لاتناہی نظام یا قبیل ہے اور اس قبیل کے الگ الگ منحنی ایک مستقل کو جو قبیل کی تخصیص کرتا ہے مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نظام کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کرینگے لیکن یہاں ہم بالخصوص نقاط تقاطع کے انتہائی مقامات پر بحث کرینگے جبکہ مستقل [یا جیسے (parameter.) بھی کہتے ہیں] میں تبدیلی لا انتہا کم ہو جب ہم ایک منحنی سے دوسرے منحنی تک جائیں۔ اس طرح عام طور پر ایک یا زیادہ "انتہائی نقاط تقاطع" ہر ایک منحنی پر ہونگے جہاں پر یہ ساتھ کے منحنی کو کاٹتا ہے۔ ان انتہائی نقاط تقاطع کا طریق نظام کا "لفاف" کہلاتا ہے۔

مثال ۱۔ معلوم نصف قطر کے دائروں کا ایک نظام ہے، ان کے مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اس جگہ متبدل مرکز کا محدد ہے۔

شکل (۱۱۳)

اگر نظام کے دو دائروں کے مرکز ج، جَ ہوں تو ان کے نقاط تقاطع کو ملانے والا خط ج جَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے۔ اس لئے کسی دائرہ کے انتہائی نقاط تقاطع ساتھ کے دائرہ کے ساتھ اس قطر کے سرے ہیں جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔

اس لئے لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہیں اور اس سے معلومہ نیم قطر کے فاصلہ پر واقع ہیں۔ ۴۴۴

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم ہے جو محوروں کے ساتھ ملکے مستقل رقبہ (م) کا مثلث بناتا ہے۔ خط کے دو محل اَ ب، اَ بَ ہوں جو پ پر قطع کرتے ہیں تو

مثلث اپ اَ، ب پ بَ مساوی ہیں اس لئے

پ ا × پ اَ = پ ب × پ بَ

اس لئے آخرالامر جب ااَ لا انتہا چھوٹا ہو تو پ، اب کا وسطی نقطہ ہوگا۔ اگر (لا، ما) نقطہ پ کے محدد ہوں اور محوروں کا درمیانی زاویہ سم ہو تو

و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما، اس لئے

۲ لا ما جیب سم = م^{۲}

اسلئے لفاف قطع زائد ہے جس کے متقارب حوالہ کے محور ہیں۔ شکل ۱۱۴ سے اس صورت کی توضیح ہوتی ہے جس میں سم = $\frac{\pi}{۲}$

شکل (۱۱۴)

۱۳۹۔ لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ۔

فرض کرو کہ نظام کے کسی منحنی کی مساوات ہے

فہ (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۱)

جہاں عہ متبدل ہے۔ جن نقطوں پر یہ نظام کے دوسرے منحنی

فہ (لا، ما، عہَ) = ۰ ...... (۲)

کو قطع کرتا ہے اِن نقاط پر صریحاً

$$\frac{\text{فہ (لا، ما، عہَ) - فہ (لا، ما، عہ)}}{\text{عہَ - عہ}} = ۰ \quad ......(۳)$$

جب تغیر عہ - عہ لاانتہا کم ہو تو یہ آخری مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}\ \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{عہ}) = ۰ \qquad \ldots\ldots(۴)$$

۳۴۵ جہاں $\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}$ بلحاظ عہ کے جزوی تفرق کی علامت ہے دیکھو دفعہ ۳۴۔

انتہائی تقاطع کے نقطہ یا نقاط کے محدد (۱) اور (۴) کو بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱- دفعہ ۱۴۸ مثال ۱ کے دائرے اس مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 \qquad \ldots\ldots(۵)$$

بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے

$$\text{لا} - \text{عہ} = ۰ \qquad \ldots\ldots(۶)$$

(۵) اور (۶) کے درمیان عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \pm\ \text{ا} \qquad \ldots\ldots(۷)$$

جو مطلوبہ لفاف ہے۔

مثال ۲- اگر ذرہ مبدأ سے زاویہ ارتفاع طہ پر ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو بلندی ب "کی وجہ" سے ہے، تو مکانی راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{لا سس طہ} - \frac{۱}{۴}\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}}\ \text{قط}^2\ \text{طہ} \qquad \ldots\ldots(۸)$$

جہاں لا، ما کے محور بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں - سس طہ کی بجائے عہ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{عہ لا} - \frac{۱}{۴}\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}}(۱ + \text{عہ}^2) \qquad \ldots\ldots(۹)$$

مختلف ارتفاعوں یعنی عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے راستوں کا لفاف معلوم کرنے کے لئے ہم بلحاظ عہ کے (۹) کو تفرق کرتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا - \frac{1}{2} \frac{عہ لا^2}{ب} = ۰ \quad ....(۱۰)$$

یہ مساوات پوری ہوتی ہے لا = ۰ یا عہ لا = ۲ ب سے۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے ما = ۰ اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مبدأ طریق کا ایک حصہ ہے اور یہ ایسے بھی ظاہر ہے۔ دوسرے نتیجہ سے، عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^2 = ۴ ب (ب - ما) \quad ....(۱۱)$$

یہ ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے، اس کا ماسکہ مبدأ پر ہے اور اس کا راس بلندی ب پر ہے۔*

۱۴۰- جبریہ طریقہ - اگر مساوات

$$فہ (لا، ما، عہ) = ۰ \quad ....(۱)$$

میں فہ، عہ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو گذشتہ دفعہ کے قاعدہ کی اور طرح سے بھی تحقیق ہوسکتی ہے۔ اگر لا، ما کو کوئی خاص قیمتیں دیجائیں تو مساوات سے عہ معلوم ہوتا ہے، یعنی اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ نظام کے کونسے منحنی دئے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ اگر مساوات بلحاظ عہ کے ن ویں درجہ کی ہو تو ان منحنیات (حقیقی یا خیالی) کی تعداد ن ہوگی اور بالعموم یہ ن منحنی مختلف ہونگے۔ لیکن اگر نقطہ زیر بحث دو متصل منحنیوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ہو تو عہ کی دو قیمتیں منطبق ہونگی۔ دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ عہ میں مساوات کی دوہری اصل کے لئے شرط یہ ہے

۳۴۶

$$\frac{جف}{جف عہ} فہ (لا، ما، عہ) = ۰ \quad ....(۲)$$

* تاریخی نقطہ نظر سے یہ مسئلہ دلچسپ ہے کیونکہ یہ پہلی مثال ہے جس میں منحنی خطوط کے قبیل کا لفاف حاصل کیا گیا (برنولی)۔ لفاف دریافت کرنے کا عام طریقہ لیب نیٹز کی ایجاد معلوم ہوتا ہے۔

اس لئے حسب سابق انتہائی تقاطع (۱) اور (۲) کو ہمزاد مساواتوں کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور لفاف ان مساواتوں سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر مساوات (۱) عا میں درجہ اول کی مساوات ہو تو نظام کا صرف ایک منحنی نقطہ معلومہ میں سے گذرتا ہے اور اس صورت میں لفاف نہیں ہو سکتا۔ اس کی مثالیں متوازی خطوط اور ہم مرکز دائرے ہیں۔ مثلاً

ل لا + م ما = عا .... (۳)

لا² + ما² = عا .... (۴)

اگر (۱) درجہ دوم کی مساوات ہو مثلاً

پ عا² + ۲ ق عا + ر = ۰ .... (۵)

جہاں پ، ق، ر متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

پ ر = ق² .... (۶)

اس لئے یہ لفاف کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ خط مستقیم لا/عا + ما/با = ۱ .... (۷)

حوالہ کے محوروں کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ (م²) کا مثلث قطع کرتا ہے۔ اسلئے

عا با جیب سہ = ۲ م² .... (۸)

جہاں سہ محوروں کا میلان ہے۔ با کو ساقط کرنے سے متغیر خط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

عا² ما جیب سہ − ۲ عا م² + ۲ م² لا = ۰ .... (۹)

اس امر کو بیان کرنے سے کہ یہ مساوات بلحاظ عا کے مساوی اصلیں رکھتی ہے ہمیں لفاف کی مساوات یہ حاصل ہوتی ہے

۲ لا ما جیب سہ = م² .... (۱۰)

جیسا کہ دفعہ ۱۳۸ مثال ۲ میں حاصل کیا گیا۔

۳۴۷

مثال ۲ ۔ زاویہ قائمہ کی ایک ٹانگ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور راس ایک ثابت خط مستقیم مرتسم کرتا ہے، دوسری ٹانگ کا لفاف مطلوب ہے۔
اگر ثابت خط مستقیم محور ما ہو اور ثابت نقطہ (ا، ۰) تو دوسری ٹانگ کی مساوات باسانی حاصل ہوتی ہے

ما = م لا + ا/م .... (۱۱)

جہاں م محور لا کے ساتھ زاویہ میلان کا مماس ہے۔ اس مساوات کو اس شکل میں لکھنے سے

م۲ لا - م ما + ا = ۰ .... (۱۲)

ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف قطع مکافی ہے

ما۲ = ۴ ا لا .... (۱۳)

۱۴۱ ۔ لفافوں کی تماسی خاصیت ۔

اوپر کی مثالوں سے طالب علم ذیل کے مسئلہ کے ادراک کے لئے تیار ہو چکا ہو گا۔
منحنیات کے کسی نظام کا لفاف (بالعموم) اپنے ہر نقطہ پر نظام کے متناظر منحنی کو مس کرتا ہے۔

مساواتوں

فہ (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۱)

اور

جف/جف عہ فہ (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۲)

سے لا، ما بطور عہ کے تفاعل کے حاصل ہوتے ہیں، فرض کرو کہ

لا = فا (عہ)، ما = فہ (عہ) .... (۳)

اور مساواتوں (۳) سے لفاف کی تعیین ہوتی ہے۔ اگر (۳) سے لا، ما کی قیمتیں مساوات (۱) کے دائیں رکن میں درج کی جائیں تو عہ کا ایک تفاعل حاصل ہوگا جو متماثلاً صفر ہوگا اور اس تفاعل کو بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ بھی صفر ہوگا، اس لئے دفعہ ۵۹ (آ) کے قاعدہ کی رو سے لازماً

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}_1}\cdot\frac{\text{فرلا}_1}{\text{فرعہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}_1}\cdot\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرعہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف عہ}_1}\times\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرعہ}_1}=0 \quad (۴)$$

اور (۲) کی رو سے یہ ربط ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}_1}\cdot\frac{\text{فرلا}_1}{\text{فرعہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}_1}\cdot\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرعہ}_1}=0 \quad \dots\dots (۵)$$

یا

$$\frac{\dfrac{\text{فرما}_1}{\text{فرعہ}_1}}{\dfrac{\text{فرلا}_1}{\text{فرعہ}_1}}=-\frac{\dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}_1}}{\dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}_1}} \quad \dots\dots (۶)$$

دفعہ ۶۱ کی رو سے اس مساوات کا دایاں رکن لفاف کے لئے $\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}$ کی قیمت ہے اور دفعہ ۵۹ (۱۰) کی رو سے بایاں رکن منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}_1}$ کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے، اِس سے معلوم ہوا کہ انتہائی نقطہ تقاطع پر منحنی (۱) اور لفاف کا مماس وہی ہے۔

۳۴۸

اس مسئلہ کا ہندسی پہلو یوں واضح ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل میں متبدل عہ کی قیمتوں عہ۱، عہ۲ کے جواب میں نظام کے دو منحنیات کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں اور یہ منحنی ایکدوسرے کو پ۱ پر قطع کرتے ہیں۔

شکل (۱۱۵)

فرض کرو کہ پ، پ، لفاف پر کے متناظر نقطے ہیں یعنی پ، پ کا انتہائی مقام ہے جبکہ ع، کو قائم رکھ کے، ع، کو ع، کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے اور پ، پ کا انتہائی مقام ہے جبکہ ع، کو ثابت رکھکر ع، کو ع، کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے۔ چونکہ ع، کے یہ تغیر متقابل رخوں میں ہیں اور چونکہ پ کے محدد عام طور پر ع،' ع، کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں، اس لئے پ کے متناظر ہٹاؤ پ پ، اور پ پ، عام طور پر تقریباً متقابل سمتوں میں ہونگے (جبکہ | ع، - ع، | بہت چھوٹا ہو) اور پ، پ، پ، بڑے منفرجہ زاویہ والا مثلث ہوگا۔ اس لئے آخرالامر جب | ع، - ع، | لاانتہا چھوٹا ہو تو پ، پ، اور پ پ، سمت میں منطبق ہوں گے یعنی لفاف کا مماس منحنی کے مماس پر منطبق ہوگا۔

بعض صورتوں میں اوپر کی تحقیق درست نہیں رہتی۔ جہاں تک تحلیلی ثبوت کا تعلق ہے یہ ظاہر ہے کہ (۵) سے کوئی نتیجہ مستنبط نہیں ہو سکتا جبکہ نقطہ زیر بحث پر ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \cdot\,,\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \cdot \qquad \text{.......(۷)}$$

یعنی جبکہ منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت یگانہ طور پر معین نہ ہو سکے۔ یہ خصوصیت ایک "نادر نقطہ" پر پیدا ہوتی ہے خواہ اپنی نوعیت کے لحاظ سے یہ عقدہ ہو یا قرن یا اکیلا نقطہ (دیکھو دفعہ ۱۱۹)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ قبیل کے نادر نقطوں کا طریق، اگر ایسے طریق کا وجود ہو، (۱) اور (۲) کے درمیان ع، کے حاصل اسقاط میں شریک ہوگا لیکن یہ طریق عام طور پر دئے ہوئے منحنیوں کو صحیح معنوں میں "مس" نہیں کرتا۔ اس امر کی پوری تحقیق اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن ایک سادہ سی مثال یہاں دیجاتی ہے*

---

* تفرقی مساوات کی کتابوں میں یہ بحث "نادر حل" کے باب کی ضمن میں ملے گی۔

ذیل کے قبیل پر غور کرو۔

ا (ما - عہ)^۲ = لا^۲ (لا + ب) . . . . (۸)

۴۴۹ دفعہ ۱۱۹ سے ظاہر ہے کہ نقطہ (۰ ، عہ) پر عقدہ ہے، قرن ہے یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اسکے کہ ب مثبت ہے، صفر ہے یا منفی۔ لفاف معلوم کرنیکے عمل سے حاصل ہوتا ہے ما - عہ = ۰ ، اس لئے

لا^۲ (لا + ب) = ۰ . . . . (۹)

خط لا = ۰ سے نادر نقطوں کا طریق حاصل ہوتا ہے جو اصلی منحنیوں کو مس نہیں کرتا۔ بخلاف اس کے خط لا = - ب مس کرتا ہے (اگر ب صفر نہ ہو) ہندسی بحث میں یہ مان لیا گیا تھا کہ پ کے عین پڑوس میں منحنیات عہ، عہ۱ کا کوئی اور تقاطع نہیں ہے۔ عقدہ کی صورت میں عام طور پر دو متصل تقاطع ہونگے جن کے لا، محدد (مثلاً) بالترتیب اِن شکلوں کے ہونگے ف (عہ، عہ۱) اور ف (عہ۱، عہ) لیکن ف (عہ، عہ۱) متبدلوں عہ، عہ۱ کا متشاکل تفاعل نہیں ہے اس لئے یہ استدلال عقدوں کے طریق پر عائد نہیں ہوتا۔ نیز قرن کی صورت میں عہ یا عہ۱ کے لا انتہا چھوٹے تغیر کی وجہ سے نقطہ پ کا ہٹاؤ شکل ۱۱۵ میں رتبہ اول کا نہیں ہوگا اور عام طور پر نقطے پ۱ اور پ۲ دونوں پ کے ایک ھی جانب ہوتے ہیں۔ اکیلے نقطہ کی پڑوس میں متصل منحنیات کا کوئی حقیقی تقاطع نہیں ہوتا۔

۱۴۲ - برپیچہ (Evolute) - منحنی کا برپیچہ اس کے مرکز انحنا کا طریق ہوتا ہے اور چونکہ مرکز انحنا (دفعہ ۱۳۳) دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے برپیچہ دئے ہوئے منحنی کے عمادوں کا لفاف ہے۔ اسلئے ابتدائی منحنی کے عماد برپیچہ* کے مماس ہوتے ہیں۔

---

* یہ ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۴۱ کے آخر کی مستثنےٰ صورتیں خط مستقیم کے لفاف میں پیدا نہیں ہوتیں۔

مثال ۱۔ قطع مکافی $\text{عا}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ . . . . (۱)

میں $\text{لا} = \text{ا}\,\text{مم}^2\,\text{سا}$ ، $\text{عا} = ۲\,\text{ا}\,\text{مم}\,\text{سا}$ . . . . (۲)

اور (دفعہ ۱۳۴ مثال ۴) سے

$$\text{ر} = -\frac{۲\,\text{ا}}{\text{جب}^3\,\text{سا}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے انحنا کے مرکز کے محدد یہ ہیں

$$\left.\begin{aligned} \text{ضا} &= \text{لا} - \text{ر}\,\text{جب}\,\text{سا} = ۳\,\text{لا} + ۲\,\text{ا} \\ \text{عا} &= \text{عا} + \text{ر}\,\text{جم}\,\text{سا} = -\frac{\text{عا}^3}{۴\,\text{ا}^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اسلئے $\text{عا}^2 = \frac{\text{عا}^6}{۱۶\,\text{ا}^4} = \frac{۴\,\text{لا}^3}{\text{ا}} = \frac{۴}{۲۷}(\text{ضا} - ۲\,\text{ا})^3/\text{ا}$

پس برپیچہ نیم کعبی مکافی ہے $\text{ا}\,\text{عا}^2 = \frac{۴}{۲۷}(\text{لا} - ۲\,\text{ا})^3$ . . . . (۵)

۳۵۰

شکل (۱۱۶)

بطرز دیگر۔ مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ عماد کی مساوات کی یہ شکل ہے

ما = م (لا - ۲ ا) - ا م۳ ....(۶)

اس کا لفاف معلوم کرنیکے لئے بلحاظ م کے جزوی تفرق لو اور حاصل کرو

لا - ۲ ا = ۳ ا م۲ ، ما = ۲ ا م۳ ....(۷)

م کے ساقط کرنے سے نتیجہ (۵) حاصل ہوتا ہے۔ منحنی شکل ۱۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۲۔ ناقص لا = ا جم فہ ، ما = ب جب فہ ....(۸)

کے کسی نقطہ پر عماد ہے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم فہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \quad \ldots\ldots(۹)$$

بلحاظ فہ کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم}^3\text{ فہ}} = -\frac{\text{ب ما}}{\text{جب}^3\text{ فہ}} = \text{لہ (فرض کرو)} \quad \ldots\ldots(۱۰)$$

(۹) میں درج کرنے سے لہ = ا۲ - ب۲ ....(۱۱)

اس لئے مرکز انحنا کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}} \text{جم}^3\text{ فہ} ، \text{ما} = -\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}} \text{جب}^3\text{ فہ} \quad \ldots\ldots(۱۲)$$

ب
فَ
اَ
ا
عَ
و
ع
ج
ف
بَ

شکل (۱۱۷)

اوربرپیچہ ہے $(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب طا})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$ .... (۱۳) ۳۵۱

یہ منحنی جو ستارہ نما سے قائم ظل کے ذریعہ حاصل ہوسکتا ہے شکل ۱۱۷ میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط اَ ب، اَ ب پر انحنا کے مرکز بالترتیب ہیں

ع، ف، عَ، فَ

مثال ۳۔ خط تدویر کا برپیچہ دریافت کرو۔

خط تدویر ا پ د (شکل ۱۱۸) کے کسی نقطہ پ پر دفعہ ۱۳۴ مثال ۲ کی رو سے

ر = ۲ پ ے .... (۱۴)

محور اب کو دَ تک اتنا بڑھاؤکہ ب دَ = اب اور دت سے کو بڑھاؤ کہ یہ دَ میں سے گذرنیوالے، ب ے کے متوازی خط سے ےَ پر ملے۔ ے ےَ کے قطر پر دائرہ کھینچو اور پ ے کو اتنا بڑھاؤ کہ دائرہ کے محیط سے یہ پَ پر ملے تو پَ ے = پ ے، پس پَ خط تدویر کے نقطہ پ پر مرکز انحنا ہے۔ چونکہ قوس پَ ےَ قوس ت پ کے مساوی ہے اور اس لئے ب ے اور دَ ےَ کے مساوی ہے اسلئے پَ کا طریق صریحاً ایک خط تدویر ہے جس کا مکون دائرہ ے پَ ےَ ہے جو دَ ےَ کے نچلے پہلو پر لڑکتا ہے اور مرسم نقطہ دَ سے لڑکنا شروع ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط تدویر کا برپیچہ ایک مساوی خط تدویر ہے اور اس کا قرن دَ پر ہے۔

نیز دفعہ ۱۲۲ (۴) سے ظاہر ہے کہ تدویری قوس

پَ د = ۲ ے پَ = پ پَ

اس لئے قوس دَ پَ + پَ پ = مستقل .... (۱۵)

اس لئے شکل ۱۱۸ کی نچلی تدویر اوپر کی تدویر کا درپیچہ (دفعہ ۱۴۴) ہے* جب کبھی ایک منحنی کی مساوات ع اور سا کے رشتے سے متعین ہو سکے مثلاً ۳۵۲

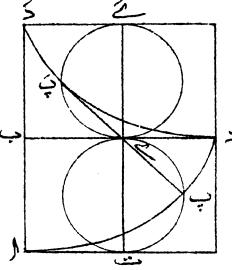
---

* یہ مثال تدویری رقاص کے نظریہ کی ضمن میں تاریخی نقطہ نظر سے مشہور ہے۔ یہ نتائج ہائی گن (Huyghens ۱۶۷۳) کے ساتھ منسوب ہیں۔

ع = ف (سا) .... (۱۶)

تو برپیچیہ اس مساوات

ع = فَ (سا) .... (۱۷)

شکل (۱۱۸)

سے حاصل ہوگا بشرطیکہ (۱۷) میں یہ فرض کرلیا جائے کہ سا کا مبدأ ایک قائمہ میں سے آگے کو ہٹا دیا گیا ہے۔ شکل ۱۰۸ صفحہ (۴۶۲) سے کے حوالہ سے یہ بالکل واضح ہوگا کیونکہ برپیچیہ کے مماس پر مبدأ سے عمود و ع = پ ے = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}$ جبکہ اصلی منحنی کے رموز استعمال کئے جائیں۔

مثال ۴۔ بریاہ تدویر کا برپیچیہ دریافت کرو۔

شکل ۱۸ صفحہ (۴۰۷) میں اگر و ے ت پ پر جو بر تدویر کا نقطہ پ پر مماس ہے عمود ع نکالا جائے تو

ع = و ت جم پ ے ج = (ا + ۲ ب) جم $\frac{\text{فہ}}{۲}$

یا ع = (ا + ۲ ب) جم $\frac{\text{ا}}{\text{ا} + ۲\text{ب}}$ سا ...... (۱۸)

اگر سا کا مبدأ راس کی بجائے قرن کے جواب میں ہو تو زاویہ کی جیب التمام کی بجائے جیب رکھنا ہوگی۔

اِس لئے پرپیچ کی صورت ہیں

ع = ـ ا جب $\frac{\text{ا}}{\text{ا} + ۲\text{ب}}$ سا .... (۱۹)

۳۵۳

جیسے سا کے مبدأ کی درستی سے (۱۸) کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ پرپیچ متشاکل بر تدویر ہے جس کے ابعاد اس نسبت $\frac{\text{ا}}{\text{ا} + ۲\text{ب}}$ سے کم کر دئے گئے ہیں۔

در تدویر کے لئے صرف ب کی علامت کو بدل دینا ہے*۔

۱۴۳ ـ **پرپیچ کی قوس** ـ کسی منحنی کے کسی دو نقطوں پر انحنا کے نیم قطروں کا فرق پرپیچ کے متناظر نقطوں کے درمیان کی قوس کے مساوی ہے۔

اس کے ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور پ، کے عماد ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں اور ج اور ج، متناظر

---

* معائنہ کے بعد معلوم ہوتا ہے کہ مساوات ع = ج جم م سا یا ع = ج جب م سا بالترتیب "مدبر" یا در تدویر کو تعبیر کرتی ہے بموجب اسکے کہ م $\gtrless$ ا بشرطیکہ دفعہ ۱۲۳ اکی تعریف کے مطابق گرد تدویروں کو بر تدویروں میں شامل کر لیا جائے۔

بلحاظ مرکز کے "مدبر" یا در تدویر کا پائیں منحنی خاص طرز کا بر دوویہ ہے جس کی طرف دفعہ ۱۲۵ مثال ۲ میں اشارہ کیا گیا ہے شکل ۹۲ چہار

انحنا کے مرکز ہیں۔
دفعہ ۱۴۱ کی رو سے ج ج ج بالعموم منفرجہ زاویہ والا مثلث ہے اور
جب پ کو پ کے لاانتہا قریب لیا جائے تو ج۱ ج + ج ج آخرالامر
ج۱ ج کے ساتھ نسبت تساوی رکھتا ہے۔
نیز چونکہ ج سے منحنی پر کے متحرک نقطہ کا فاصلہ نقطہ پ پر اقل قیمت
رکھتا ہے اس لئے ج پ۱ اور ج پ کے درمیان فرق آخرالامر دوسرے
رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز ہو سکتی ہے۔ اس لئے

ج۱ پ۱ - ج پ = ج۱ ج + ج ج = ج۱ ج

شکل (۱۱۹)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ابتدائی منحنی کا نیم قطر انحنا ر ہو اور برپیچہ
کی قوس صہ تو آخرالامر مف ر = مف صہ یا

فر ر / فر صہ = ۱ .... (۱)

پس تکمل سے ر = صہ + م .... (۲)
جہاں م اختیاری مستقل ہے جو صہ کی پیمائش کے مبدأ پر منحصر ہے۔
بطرز دیگر۔ دفعہ ۱۳۲ کی مساواتوں

ضا = لا - ر جب سا ، عا = ما + ر جم سا ......(۳)

قرنوں والے بردوریہ کے پائیں منحنی کو تعبیر کرتی اور شکل ۹۴ چار قرنوں والے درتمدیر پائیں کو۔

سکے تفرق سے

$$\frac{فرضا}{فرس} = - \frac{فرر}{فرس} جب سا، \quad \frac{فرعا}{فرس} = \frac{فرر}{فرس} جم سا \ldots (۴)$$ ۳۵۴

کیونکہ $\frac{فرلا}{فرس} = جم سا، \quad \frac{فرعا}{فرس} = جب سا، \quad \frac{فرسا}{فرس} = \frac{۱}{ر}$

اس لئے
$$\frac{فرعا}{فرضا} = - مم سا \ldots\ldots\ldots (۵)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ برپیچہ کا مماس ابتدائی منحنی کا عماد ہے اور

$$\frac{فرصہ}{فرس} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{فرضا}{فرس}\right)^{۲} + \left(\frac{فرعا}{فرس}\right)^{۲} \right\}} = \frac{فرر}{فرس} \ldots (۶)$$

تکمل کرنے پر اس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

خط تدویر کی صورت میں یہ خاصیت اس سے قبل دفعہ ۱۴۲ (۱۵) میں حاصل کی گئی ہے۔

اوپر کے مسئلہ سے یہ ایک عجیب نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ منحنی کے متصل نقطوں کے انحنا کے دائرے عام طور پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ اسکی وجہ یہ ہے۔ مرکزوں کے درمیان کا فاصلہ برپیچہ کا وتر ہے اور اسلئے عام طور پر متناظر قوس سے کم ہوتا ہے یعنی نیم قطروں کے فرق سے کم رہتا ہے۔ نیز اگر منحنی کی ذاتی مساوات یہ ہو

$$س = ف (سا) \ldots\ldots\ldots (۷)$$

تو
$$صہ = ر + م = فَ (سا) + م \ldots\ldots\ldots (۸)$$

اگر سا کا مبدأ بقدر ایک قائمہ کے بدل دیا جائے تو یہ برپیچہ کی ذاتی مساوات ہوگی۔ جمع کیا ہوا مستقل حذف کر دیا جا سکتا ہے اگر صہ کے مبدأ کا مناسب انتخاب کیا جائے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص کے محور ا، ب ہیں۔ ان محوروں کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب $\frac{ب^{۲}}{ا}$ اور $\frac{ا^{۲}}{ب}$ ہیں، اس لئے جن چار حصوں میں برپیچہ کے قرن

اسے تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۱۷) ان میں سے کسی ایک کا طول ہے

$$\frac{ا^۲}{ب} - \frac{ب^۲}{ا} = \frac{ا^۳ - ب^۳}{اب}$$

مثال ۲ - خط تدویر کی ذاتی مساوات ہے

س = ک جب سا .... (۹)

اور پرپچہ کی مساوات ہے

ص = ک جم سا .... (۱۰)

اس لئے پرپچہ مساوی خط تدویر ہے جیسا کہ پہلے ثابت کیا گیا۔

۱۴۴ - دریچے اور متوازی منحنی

اگر منحنی ا' ایک منحنی ب کا پرپچہ ہو تو ب' ا کا ایک دریچہ (Involute) ہوگا۔

ایک دریچہ اس لئے کہ کسی ایک منحنی کے بیشمار دریچے ہوتے ہیں۔ کسی منحنی کا دریچہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ منحنی پر ثابت نقطہ و لو اور اس کے کسی متغیر نقطہ پ پر کے مماس کی سمت میں و سے پرے طول پ ق اتنا ناپو کہ

قوس و پ + پ ق = مستقل .... (۱)

دفعہ ۱۴۳ کے استدلال کو الٹنے سے یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دئے ہوئے منحنی کے مماس ق کے طریق کے عماد ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ یہ طریق دریچہ کی تعریف بالا کو پورا کرتا ہے۔ "مستقل" کو بدلنے سے ایک ہی منحنی کے کئی دریچے حاصل ہوتے ہیں۔

عملی مثال کے طور پر ایسا خیال کرو کہ معلومہ شکل کی کسی مادی قوس پر ایک تاگا لپیٹ دیا گیا ہے اور اسی کا ایک سرا منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہوا ہے۔ رسی کے آزاد حصہ پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے وہ دریچہ منحنی ہے۔ دراصل اس نام کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔

مثال ۱ - خط خسری زنجیرہ کا دریچہ ہے۔ دفعہ ۱۲۰۔

۲۵۵

مثال ۲۔ نیم قطر ا کا دائرہ ہے، اس کے پریچیہ میں صریحاً

$$\frac{فر س}{فر سا} = ر = ا سا \qquad \dots\dots\dots\dots (۲)$$

اگر سا کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے۔ اسلئے تکمل کرنے سے

$$س = \frac{۱}{۲} ا سا^۲ \qquad \dots\dots\dots\dots (۳)$$

کسی مستقل کا اضافہ کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر س کو قرن (سا = ۰) سے ناپنا شروع کیا جائے۔

(دائرہ کی) اس خاص صورت میں ظاہر ہے کہ تمام دریچے متطابق طور پر مساوی ہیں اس لئے عام ذکر میں محض دائرہ کا دریچیہ کہتے ہیں۔ یہ منحنی شکل ۱۲۰ میں دکھایا گیا ہے

شکل (۱۲۰)

اگر کسی معلومہ منحنی کے عماد پر منحنی سے شروع ہو کر ایک مستقل طول ناپا جائے تو اس طرح جو نقطہ ملیگا اس کا طریق معلومہ منحنی کا "متوازی" کہلاتا ہے۔

اگر ج پ، ج پَ منحنی کے دو متصل عماد ہوں اور متوازی منحنی کے متناظر نقطے ق اور قَ ہوں تو پ ق = پَ قَ

چونکہ ج پ اور ج پَ کا فرق دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے

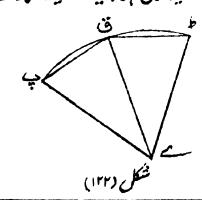
شکل (۱۲۱)

معلوم ہوتا ہے کہ ج ق اور ج قَ کا فرق بھی ایسے ہی دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے مثلث ج ق قَ کے زاوئے ق اور قَ آخرالامر زائے قائمہ ہیں۔ اس لئے ج ق اور ج قَ متوازی منحنی کے عماد ہیں۔

اس لئے دو متوازی منحنیات کے وہی عماد ہوتے ہیں اور وہی برپیچہ دوسرے الفاظ میں متوازی منحنی ایک ہی منحنی کے درپیچے ہوتے ہیں۔

برعکس اسکے یہ ظاہر ہے کہ کسی منحنی کے مختلف درپیچے متوازی منحنیات کا ایک نظام بناتے ہیں۔

۱۴۵۔ متحرک شکل کا فوری مرکز۔

کوئی شکل ہے جسکی بناوٹ میں تغیر واقع نہیں ہوتا، اپنی سطح میں ایسی شکل کی انتقالیت یا (ہٹاؤ) کا نظریہ ٹھیک طور پر حرکیات سے متعلق ہے، لیکن اسکے چند ہندسی استعمال دلچسپ ہیں۔

اس نظریہ کا پہلا مسئلہ یہ ہے۔ ایسا کوئی ہٹاؤ ایک ایسے گھماؤ کے معادل ہے جو کسی محدود یا لامحدود فاصلہ پر کے ایک نقطہ کے گرد وقوع پذیر ہوتا ہے۔

شکل (۱۲۲)

ذیل میں اس کا ایک ثبوت درج ہے۔ پہلے محل میں شکل کے کوئی دو نقطے (ا، ب) ہیں دوسرے محل میں وہی دو نقطے

اَ بَ پر ہیں کسی تیسرے نقطہ کا نیا مقام پَ جو ابتدا میں پ پر تھا
مثلث اَ پَ بَ بنانے سے معلوم ہوتا ہے جو مثلث ا پ ب کے
بالکل منطابق ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ متحرک شکل کا مقام معین
کرنیکے لئے صرف دو نقطوں کے مقامات کا تعین کافی ہے ۔

اب شکل کے کوئی سے نقطہ پر غور کرو فرض کرو کہ پ اس کا ابتدائی
اور ق آخری مقام ہے اور شکل کے اس نقطہ کا مقام ط ہے جو ابتدا میں
ق پر تھا۔ چونکہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط کے دو محل ہیں اسلئے
وہ باہم مساوی ہیں ۔ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ے ہو تو مثلث
پ ے ط ، ق ے ط منطابق ہیں یعنی نقطہ ے دونوں محلوں
میں وہی نقطہ ہے ۔ اس لئے ہٹاؤ ے کے گرد گھماؤ کے معادل ہے
اس نقطہ کو "گھماؤ کا مرکز" کہتے ہیں ۔ ۳۵۷

ایسا ہو سکتا ہے کہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط مستقیم میں ہوں اسلئے
ہٹاؤ ایسی صورت میں بغیر گھماؤ کے شکل کے محض نقل مکان کے معادل ہو
یا دوسرے الفاظ میں یہ کہا جا سکتا ہے کہ گھماؤ کا مرکز لاانتہا ہی پر ہے ۔

اس کے بعد کسی مستوی شکل کی مسلسل حرکت پر غور کرو جو صرف اس کے
اپنے مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ شکل کے صرف دو متصل محلوں پر اپنی
توجہ محدود رکھو۔ پہلے محل سے دوسرے محل میں شکل کسی خاص مرکز کے گرد
گھماؤ کے ذریعہ لائی جا سکتی ہے۔ اس نقطہ کا انتہائی محل جبکہ شکل کے دو مقام
یا محل ایک دوسرے سے لاانتہا قریب ہوں "فوری مرکز" کہلاتا ہے ۔

اگر شکل کے ایک ہی نقطہ کے دو متصل محل پ ، پَ ہوں اور
گھماؤ کا متناظر زاویہ مف طہ ہو تو گھماؤ کا مرکز (ے) ایسے خط مستقیم
پر واقع ہوگا جو پ پَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے اور زاویہ
پ ے پَ ، مف طہ کے مساوی ہوگا۔ اس لئے اگر ے سے
محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ پ ہو تو اس کا لاانتہا چھوٹا ہٹاؤ آخر الامر ے پ
کے علی القوائم ہوگا اور ے پ × مف طہ کے مساوی ہوگا۔

اگر وقت کا عنصر بھی شریک کرلیا جائے اور شکل کے دو محلوں کے درمیان جو وقت کا وقفہ گزرتا ہے وہ مف ت سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{\text{مف طہ}}{\text{مف ت}}$ کی انتہائی قیمت یعنی $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ "زاویئی رفتار" کہلاتی ہے۔ شکل کے اُس نقطہ کی رفتار جو فوری مرکز سے پر منطبق ہوتا ہے صفر ہے اور شکل کے کسی اور نقطہ پ کی رفتار سے پ پر علی القوائم ہے اور سے پ $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کے مساوی ہے۔

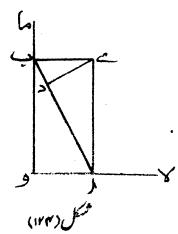
کسی مستوی شکل کی حرکت میں (جسکی وضع یا بناوٹ میں فرق نہیں آتا) مختلف نقطوں کے راستوں پر کے عماد سب کے سب فوری مرکز میں سے گذرتے ہیں۔ یہ امر ہندسی سوالات میں اکثر سود مند ثابت ہوتا ہے اگر شکل کے کسی دو نقطوں کے ہٹاؤں کی سمتیں معلوم ہوں تو فوری مرکز معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ان عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے جو ان نقطوں کی حرکت کی سمتوں پر کھینچے جائیں۔ اس کے بعد باقی تمام نقطوں کے جو ہٹاؤ ہیں ان کی سمتیں اور اضافی مقداریں متعین ہو سکتی ہیں۔

بعد ازیں متحرک شکل میں اگر کوئی خط (سیدھا یا ٹیڑھا) ہو تو ظاہر ہے کہ اس خط کے انتہائی تقاطع کا نقطہ یا نقاط اسکے متصل محل کے ساتھ صرف ان عمادوں کے پائے ہو سکتے ہیں جو فوری مرکز سے خط پر کھینچے جائیں کیونکہ خط کا کوئی اور نقطہ ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو اس کے ساتھ محدود زاویہ بناتی ہے۔

مثال ۱۔ مستقل طول کا سیدھا خط اب ہے، اس کے سرے دو سیدھے علی القوائم خط و لا، وما پر مرتسم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ خط پر کا کوئی نقطہ پ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے صدری محور و لا اور وما کی سمتوں میں ہیں۔ اوپر کے مسئلہ سے اس قطع ناقص کے

۳۵۸

نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا عمل حاصل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے۔ و لا اور و ما پر بالترتیب عمود ا ے، ب ے کھینچو، ے فوری مرکز ہے اور ے پ مطلوبہ عماد ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۳۔

شکل (۱۲۴)

شکل (۱۲۳)

مثال ۲۔ گزشتہ مثال میں متحرک خط اب کا انتہائی تقاطع اس کے متصل مقام کے ساتھ نقطہ د ہے (شکل ۱۲۴) جو فوری مرکز ے سے خط اب پر عمود کا پایہ ہے۔ اب اگر

$$\text{اب} = \text{ل} ، \quad \angle\, \text{و اب} = \text{فہ}$$

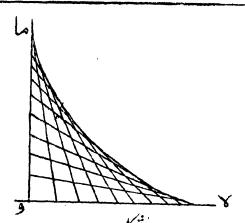
تو د کے محدد ہیں

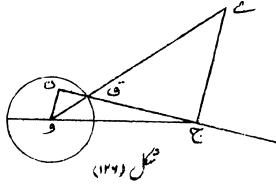
$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ب د جم فہ} = \text{ب ے جم}^2\text{ فہ} = \text{ل جم}^3\text{ فہ} \\ \text{ما} &= \text{ا د جب فہ} = \text{ا ے جب}^2\text{ فہ} = \text{ل جب}^3\text{ فہ} \end{aligned}\right\} \ldots(1)$$

اس لئے اب کا لفاف ستارہ نما

$$\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ل}^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ہے، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۴ کے ساتھ۔

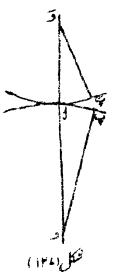
شکل (۱۲۵)

۲۵۹ مثال ۳۔ ایک بازو و ق اپنے ایک سرے و کے گرد زاویٔی رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے، ق پر ایک سلاخ چول کے ذریعہ وصل کردی گئی ہے جو ایک ثابت نقطہ ج میں سے لازماً گذرتی ہے۔ اس سلاخ کی رفتار اس کے طول کی سمت میں مطلوب ہے۔

شکل (۱۲۶)

دراصل یہ تشکیم اهتزازی اسطوانہ (Oscillating cylinder) والے بھاپ انجن کے کرنیک اور فشارہ میں پائی جاتی ہے جس میں نقطہ ج اسطوانہ کے چول خط پر واقع ہوگا۔

فوری مرکز وہ نقطہ ہے جہاں و ق ممدودہ ج پر رفتارہ کی سمت کے عمود وار خط کو قطع کرتا ہے۔ اگر و سے ج ق (ممدودہ بشرط ضرورت) پر عمود و ن کھینچا جائے تو سلاخ کے اس نقطہ کی رفتار جو ج پر منطبق ہوتا ہے یہ ہوگی

$$\text{سر} \times \text{و ق} \times \frac{\text{ے ج}}{\text{ے ق}} = \text{سر} \times \text{و ق} \times \frac{\text{و ن}}{\text{و ق}} = \text{سر} \times \text{و ن} \ldots (۳)$$

۱۴۶ — لڑکنے والے منحنیات میں استعمال —

دو مستوی شکلیں ہیں دونوں کی بناوٹ غیر متغیر ہے۔ دونوں شکلوں میں ایک ایک منحنی ثابت طور پر لگا ہوا ہے ایک شکل کا یہ منحنی دوسری شکل کے منحنی پر بغیر پھسلنے کے لڑکتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر شکل کا کوئی نقطہ بلحاظ دوسری شکل کے ایک منحنی مرتسم کریگا۔ منحنی جو اس طور پر مرتسم ہوا سے گردونیہ کہتے ہیں۔

جن صورتوں میں لڑکنے والے منحنی دائرے ہیں وہ دفعات ۱۴۲ تا ۱۴۴ میں زیر بحث آچکی ہیں۔

گردونیوں کا عام نظریہ علم ہندسہ اور حرکیات میں اس وجہ سے اہمیت رکھتا ہے کہ کسی شکل کی کوئی مسلسل حرکت، خود اپنی سطح مستوی میں اس حرکت پر مشتمل خیال کیجا سکتی ہے کہ ایک خاص منحنی جو بلحاظ شکل کے ثابت ہے دوسرے ایک خاص منحنی پر جو بلحاظ سطح مستوی کے ساکن ہے لڑکتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۹ جب ایک مستوی منحنی ایک

شکل (۱۲۷)

ایسے منحنی پر لڑکتا ہے جو ثابت خیال کیا جا سکتا ہے تو حرکت کا فوری مرکز نقطہ تماس ہے۔

صفحہ گذشتہ کی شکل میں فرض کیا جائیگا کہ نچلا منحنی ثابت ہے۔ فرض کرو کہ ا نقطہ تماس ہے اور لاانتہا چھوٹی قوسیں اپ، اپَ (= مف س) دو منحنیوں پر بنائی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ پ اور پَ کے عماد، ا پر کے عماد سے نقاط و اور وَ پر ملتے ہیں۔ تب آخرالامر و ا = ر اور وَ ا = رَ جہاں ر اور رَ دو منحنیوں کے نیم قطر انحنا ہیں نقطہ ا پر۔ لاانتہا چھوٹے ہٹاؤ کے بعد پَ وَ، و پ کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں آجائیگا اسوقت دونوں منحنی پ پر تماس میں ہو نگے۔ اس لئے زاویہ (مف طہ) جس میں سے لڑکنے والا منحنی پھریگا اور جو و پ اور پَ وَ کے درمیانی حادہ زاویہ کے مساوی ہے و اور وَ پر کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا، اسلئے آخرالامر

$$\text{مف طہ} = \frac{\text{مف س}}{ر} + \frac{\text{مف س}}{رَ} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اب وتر اپ، اپَ آخرالامر مساوی ہیں اور ان کے درمیان ا پر لاانتہا چھوٹا زاویہ بنتا ہے، اسلئے فاصلہ پ پَ آخرالامر مف س میں دوسرے رتبہ کا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب، مف س کو لاانتہا کم کیا جائے تو گھماؤ کے مرکز (دے) کا انتہائی محل ا پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر یہ مرکز اس نقطہ سے محدود فاصلہ پر ہو تو پَ کا ہٹاؤ جو دفعہ ۱۴۵ کی رو سے دے پَ مف طہ کے مساوی ہے مف س میں صرف پہلے رتبہ کا ہوگا۔

پس جب ایک منحنی ایک ثابت منحنی پر لڑکتا ہے تو اون سب نقطوں کے راستوں کے عماد، جو متحرک منحنی کے ساتھ تعلق رکھتے ہیں نقطہ تماس میں سے گذرتے ہیں۔ اس نتیجہ کی مثالیں اس سے قبل دفعات ۱۲۲، ۱۲۳ میں، تدویری اور استداری منحنیات کی ضمن میں آچکی ہیں۔ نیز اگر ایک خط مستقیم

کسی منحنی پر لڑھکے تو اس کے کسی نقطہ کے راستہ پر یہ خط مستقیم عماد ہوگا (دفعہ ۱۴۴)

شکل (۱۲۸)

اس کے بعد اگر ایک خط (سیدھے یا ٹیڑھے) پر غور کیا جائے جسے لڑھکنے والا منحنی ساتھ اٹھائے پھرتا ہے تو اس سوار منحنی کے انتہائی نقاط تقاطع اپنے متصل مقام کے ساتھ ان عمادوں کے پائے ہونگے جو نقطہ تماس سے سوار منحنی تک کھینچ سکتے ہیں۔ اور سوار خط کا لفاف ان پایوں کا طریق ہوگا۔

مثال ۱۔ ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہو تو اس کا کوئی قطر خط تدویر کو لف کرتا ہے۔ ۳۶۱

لڑھکنے والے دائرہ کا مرکز ج ہے، ے اس کا نقطہ تماس ہے، ے د قطر پ ق پر عمود ہے۔ چونکہ د ایسے دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ج ے ہے اس لئے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر چھوٹا دائرہ ہمیشہ بڑے دائرہ کی زاوی رفتار کے دو چند سے لڑھکتا فرض کیا جائے تو ثابت خط کے ساتھ اس کا نقطہ تماس وہی ہوگا اور نقطہ د اس طرح حرکت کریگا گویا چھوٹا دائرہ اسے اٹھائے ہوے ہے۔

اس لئے اسکا طریق خط تدویر ہے۔

مثال ۲۔ اسی طرح اگر ایک دائرہ (ا) ایک ثابت دائرہ (ب) پر لڑھکتا ہو تو ا کے کسی قطر کا لفاف ایسا "بر" یا درتدویر ہوگا جو ا کے نصف ناپ کے دائرہ کو ب کے محیط پر لڑکانے سے پیدا ہو سکتا ہے۔

۱۴۷۔ نقطہ گردونیہ کا انحنا۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ بلحاظ لڑھکنے والے

منحنی کے ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ کے راستہ کا انحنا معلوم کرنیکے لئے فرض کرو کہ ے نقطہ تماس ہے اور ے متصل نقطہ تماس ہے اور پ، پ کا متناظر مقام ہے۔

چونکہ لڑھکنے والے منحنی کا جو نقطہ ے پر آتا ہے اسکا ہٹاؤ دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے جس زاویہ میں سے شکل گھوم جاتی ہے وہ انتہائی صورت میں ہے

مف طہ = ∠ پ ے پَ . . . . (۱)

فرض کرو کہ پ کے راستہ کے عماد پ ے اور پَ ےَ خارج ہوکر ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مف سا ہے تو

مف سا = ∠ ے ج ےَ = (مف س × جم فہ) / ج ے . . . . (۲)

جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو ے پ، ے پر کے عماد کے ساتھ بناتا ہے

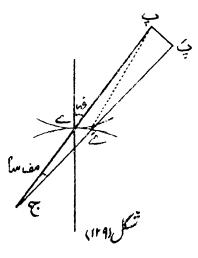
شکل (۱۲۹)

۳۶۲　نیز شکل سے مف سا = ∠ پ ےَ پَ - ∠ ے پ ےَ

= مف ط - $\frac{\text{مف س. جم فہ}}{\text{پ ے}}$

- مف س ($\frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ}$ - $\frac{\text{جم فہ}}{\text{پ ے}}$) ...... (۳)

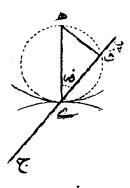
دفعہ ۱۴۶ (۱) کی رو سے اگر ر اور رَ ثابت اور لڑکنے والے منحنیوں کے انحنا کے نیم قطر ہوں۔ (۲) اور (۳) کو مساوی رکھنے سے

جم فہ ($\frac{1}{\text{ج ے}} + \frac{1}{\text{ے پ}}$) = $\frac{1}{رَ} + \frac{1}{ر}$ ...... (۴)

اس سے ج کا انتہائی مقام یعنی پ کے راستہ کا مرکز انحنا حاصل ہوتا ہے۔ نیم قطر انحنا اس کے بعد حاصل ہوگا

غہ = ج پ = ج ے + ے پ ..... (۵)

(۴) اور (۵) میں جو نتیجہ مشتمل ہے اسے سادہ ہندسی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔ ے پر کے عماد پر طول ے ھ ایسا کاٹو کہ

$\frac{1}{\text{ے ھ}} = \frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ}$ ...... (۶)

شکل (۱۳۰)

اور ے ھ کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ ے پ اس دائرہ کو

ق پر ملتا ہے۔ تب

$$\text{قط فہ}\left(\frac{1}{\bar{\text{ر}}}+\frac{1}{\text{ر}}\right)=\frac{1}{\text{ھے جم فہ}}=\frac{1}{\text{قے}}$$

اس لئے رشتہ (۴) یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\frac{1}{\text{جے}}+\frac{1}{\text{پے}}=\frac{1}{\text{قے}}\quad\ldots\ldots(7)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر پ، ق پر منطبق ہو جائے تو جے لامتناہی ہوگا یعنی متحرک شکل کا کوئی نقطہ جو اُس دائرہ پر واقع ہو جس کی ابھی تعیین کی گئی راستہ کے نقطہ انعطاف پر ہوگا۔ اس وجہ سے دائرہ زیر بحث کو "انعطافوں کا دائرہ" کہتے ہیں۔

(۷) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جے}=\frac{\text{قے}\times\text{پے}}{\text{قپ}}\text{، }\quad\text{غہ}=\frac{\text{پے}^2}{\text{قپ}}\quad\ldots\ldots(8)$$

آخری نتیجہ سے ظاہر ہے کہ غہ، ق پ کے ساتھ علامت بدلتا ہے یعنی متحرک شکل کے مختلف نقطوں کے راستے ے کی جانب مقعر یا محدب ہیں بموجب اسکے کہ وہ انعطافوں کے دائرہ کے ایک جانب واقع ہیں یا دوسری جانب۔ اوپر کی معیاری صورت میں یہ راستے ے کی طرف مقعر ہیں اگر پ دائرہ کے باہر ہو اور محدب ہیں اگر پ اندر ہو۔

استداری نعمیات سے جو دفعہ ۱۲۲ صفحہ (۴۰۳) پر دیے گئے ہیں اسکی ایک مثال اس پر آتی ہے۔ اس صورت میں انعطافوں کا دائرہ لڑھکنے والے دائرہ کے ناپ کا آدھا ہے۔ ۳۶۳

ہم نے معیاری صورت وہ لی ہے جس میں دو منحنی بلحاظ ایک دوسرے کے محدب ہیں دیکھو اشکال ۱۲۷، ۱۲۹۔ اور کوئی صورت ر اور $\bar{\text{ر}}$ کو مناسب علامات دینے سے اوپر کے نتائج میں شریک کرلیجا سکتی ہے۔

سکونیات میں "جھولنے والے پتھروں" کی حرکت میں اوپر کا نظریہ

استعمال ہوتا ہے - جب ایک کھردرا جسم فقط ایک نقطہ تماس کے ذریعہ دوسرے جسم پر ساکن ہوتا ہے تو اس کا مرکز ثقل انتصاباً نقطہ تماس کے اوپر واقع ہوتا ہے اور توازن کے قائم ہونیکے لئے یہ ضروری ہے کہ مرکز ثقل کا راستہ کسی لڑھکنے کے ہٹاؤ کی صورت میں، اوپر کی جانب مقعر ہو

مثال ۱- خط تدویر میں اگر لُڑھکنے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہو تو

ر = ∞ ، رَ = ا ، ـــــ ب = ۲ ا جم فما

(۴) میں درج کرنے سے

ج ـــ = ۲ ا جم فما = ـــ ب .... (۱۰)

اس لئے غما = ۲ ـــ ب .... (۱۱)

مثال ۲- بر تدویر (دفعہ ۱۲۳) میں

ر = ا ، رَ = ب ، ـــ ب = ۲ ب جم فما .... (۱۲)

جس سے ج ـــ = $\frac{۲ ا ب}{ا + ۲ ب}$ جم فما = $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ ـــ ب .... (۱۳)

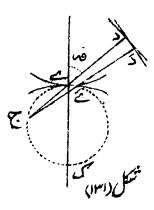
غما = $\frac{۲ (ا + ب)}{ا + ۲ ب}$ ـــ ب .... (۱۴)

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ب = - $\frac{ا}{۲}$ تو غما = ∞ ، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ کے ساتھ -

۱۴۸ - خط گرد ونیہ (Line Roulette) کا انحنا - خط گرد ونیہ کا

انحنا یعنی ایک ایسے خط مستقیم کے لفاف کا انحنا جسے لڑھکنے والا منحنی اٹھائے پھرتا ہے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے - خط کے دو متصل مقامات پر، فوری مرکز کے متناظر مقامات سے (جو فضا میں ہیں) عمود ـــ د، ـــ دَ نکالے گئے ہیں، یہ لفاف کے عماد ہیں اور جو زاویہ یہ اپنے تقاطع (ج) پر ایک دوسرے سے بناتے ہیں وہ گھماؤ کے زاویہ مف طما کے مساوی ہے

اگر ے د لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر کے عماد کے ساتھ زاویہ فا بنائے اور ے ہے = مف س تو انتہائی صورت میں

مف س جم فا = ج ے مف طا . . . . . . (۱)

شکل (۱۳۱)

۳۶۴ اس لئے دفعہ ۱۴۶ (۱) سے مف طا کی قیمت درج کرنے سے

جم فا / ج ے = ۱/ر۱ + ۱/ر۲ . . . . (۲)

لفافہ کا نیم قطر انحنا حاصل ہوگا،

فا = ج ے + ے د . . . . (۳)

لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر جو عماد ہے اوس پر طول ے ک ایسا لو کہ

۱/ے ک = ۱/ر۱ + ۱/ر۲ . . . . (۴)

دفعہ گذشتہ میں ناپنے کی جو سمت ہے اسکی مخالف سمت یہ طول بنایا جائے۔ ے ک کے قطر پر دائرہ کھینچو - (۲) سے ظاہر ہے کہ ج اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں لڑکنے والے

متحنی کے کسی معلومہ مقام کے لئے تمام خط گردونیوں کے انحنا کے مرکزونکا طریق ایک دائرہ ہے۔ اور جب برداشتہ خط ک میں سے گذرے تو د ج پر منطبق ہوگا اور ج لفاف پر ساکن نقطہ (دفعہ ۱۳۳) ہوگا۔ اوپر کے دائرہ کو اس لئے قرنوں کا دائرہ کہا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر خط تدویر کو ایسے دائرہ کے ایک قطر کا لفاف خیال کیا جائے جو ایک ثابت خط مستقیم (دفعہ ۱۴۶ مثال ۱) پر لڑکتا ہے تو یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نیم قطر انحنا عماد کا دوچند ہے۔

مثال ۲۔ "برتدویر" کو ایک ایسے دائرہ کے قطر کا لفاف سمجھکر جو ایک اور ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے تکوین کی گئی ہے، تب دفعہ ۱۴۳ کی ترمیم کے مطابق س = ا، س = ۲ب اور اسلئے (۲) سے

$$ج ے = \frac{۲ ا ب}{ا + ۲ب} جم فما = \frac{ا}{ا + ۲ب} ے د$$

جو دفعہ ۱۴۷ مثال ۲ کے مطابق ہے۔

۱۴۹۔ کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں۔

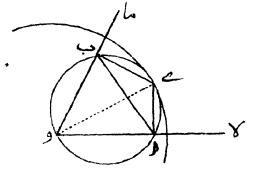
کوئی مستوی شکل اپنی مستوی سطح میں متحرک ہے، اسکے مختلف محلوں کے مسلسل سلسلہ پر غور کرو۔ فوری مرکز کا فضا میں ایک خاص طریق (لوکس) ہوگا اور شکل کے اندر بھی ایک خاص طریق ہوگا۔ ایسے منحنیوں کو جنکی اوپر تعریف ہوئی مرکز طریق کہتے ہیں، اول الذکر کو ہم فضائی مرکز طریق کہینگے اور موخر الذکر کو جسمی مرکز طریق۔ جس مسئلہ کا دفعہ ۱۴۶ میں حوالہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ شکل کی کوئی معلومہ حرکت جسمی مرکز طریق کے فضائی مرکز طریق پر بغیر پھسلنے کے لڑکنے سے پیدا ہوسکتی ہے۔

شکل کے کسی معلومہ محل پر غور کرو، فرض کرو کہ ے اس کا فوری مرکز اور ے، ذ، بالترتیب متصل متناظر نقطے ہیں جسمی مرکز طریق اور فضائی مرکز طریق پر۔

فرض کرو کہ جسم زاویہ مف طہا میں سے گھومتا ہے جیسے فوری مرکز ے سے ز پر چلا جاتا ہے۔

تب انتہائی صورت میں دفعہ ۱۴۵ کی رُو سے

ے ے = ے ز اور ے ز = ے ے مف طہ

اس لئے زاویہ ے ے ز انتہا میں معدوم ہو جاتا ہے اور ے پر دونوں طریقوں کے مماسی خط ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور دونوں منحنیات کی متناظر عنصری قوسیں نسبت تساوی میں ہوتی ہیں۔

شکل (۱۳۲)

مثال ۔ مستقل طول کا خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت خطوط مستقیم ولا، وما پر رہتے ہیں۔

فوری مرکز ے، ولا، وما پر کے عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے جو بالترتیب نقاط ا اور ب پر کھینچے جائیں۔ نقاط ا اور ب ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا قطر و ے ہے اور چونکہ اس دائرہ میں دئے ہوئے طول کا وتر اب محیط پر ایک مستقل زاویہ او ب بناتا ہے اس کا قطر متعین ہو سکتا ہے اسلئے ے کا فضائی طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے۔ نیز چونکہ زاویہ اےب مستقل ہے اسلئے ے کا طریق بلحاظ اب کے ایک دائرہ ہے جس کا قطر و ے کی مستقل قیمت کے مساوی ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث

ایک دائرہ کے دوسرے ثابت دائرہ کے اندر جس کا ناپ دو چند ہے لڑھکنے کے معاول ہے۔ ایسی حرکت پر دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ میں بحث کی گئی ہے اور یہ دکھایا گیا ہے کہ کوئی نقطہ پ جو بلحاظ ا ب کے ثابت ہے قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جو بعض صورتوں میں جبکہ پ لڑھکنے والے دائرہ کے محیط پر واقع ہو ایک خط مستقیم میں بگڑ کر رہ جاتا ہے۔

۱۵۰ - بردوریوں کی بطور گردونیوں کے دوہری تکوین

مزید مثال کے طور پر ہم یکساں دائری حرکتوں کو جوڑ دار متوازی الاضلاع و ق پ قَ کے ذریعہ جس کا دفعہ ۱۲۵ میں حوالہ دیا گیا ہے ترکیب دینے کے پہلی طریقہ کی طرف عود کرتے ہیں۔

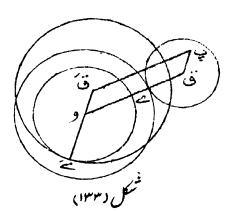
تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ سلاخوں و قَ، و ق کی زاوی رفتاریں ن، نَ ایک ہی علامت رکھتی ہیں۔

سلاخ ق پ کا فوری مرکز (سے) ایسا نقطہ ق و میں ہوگا

نَ × ق سے = ن × و ق ....(۱)

۳۶۶

کیونکہ کسی ایسے نقطہ کی رفتار جو ق پ کے ساتھ استوار طور پر لگا ہوا ہے مشتمل ہوگی انتقالیت ن × و ق پر جو و ق کے علی القوائم ہے اور ایسے گھماؤ پر جو ق کے لحاظ سے زاوی رفتار نَ سے عمل میں آتا ہے۔ اس لئے شرط بالا کے ماتحت ایسے نقطہ کی رفتار جو ق پ کے ساتھ لگا ہوا ہے اور آن زیر بحث میں نقطہ سے پر ہے صفر ہوگی۔ اسلئے سلاخ ق پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرق ہیں جو و اور ق کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور سے میں سے گزریں۔

اسی طرح کے استدلال کی بنا پر سلاخ قَ پ کا فوری مرکز (سےَ) ایسا نقطہ قَ و میں ہوگا کہ

ن × قَ ےَ = نَ × وقَ ...... (۲)*

شکل (۱۳۳)

پس سلاخ قَ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طریق دائرے ہونگے جنکے مرکز و اور ف ہونگے اور جو ےَ میں سے گذرینگے۔
چونکہ نقطہ پ دونوں سلاخوں ف پ اور قَ پ پر واقع ہے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی سیدھا یا راست بردور یہ بطور براستداوی کے دو طرح سے مرتسم ہو سکتا ہے۔
اس خاص صورت میں جبکہ قَ پ = ف ے ' (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

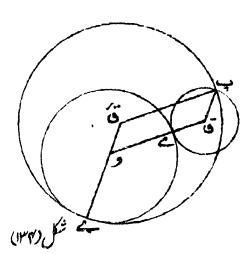
قَ پ : وقَ = ف ے : وق = ن : نَ = وقَ : قَ ےَ
= قَ پ : قَ ےَ

بس سے قَ پ = وقَ = قَ ےَ

پ کا راستہ اس صورت میں برتدویر ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی برتدویری دو طرح سے تکوین ہو سکتی ہے یعنی دو معین دائروں میں سے

* شکل ۱۳۳ اسی صورت کے لئے کھینچی گئی ہے جبکہ نَ ے ن۔ اگر نَ > ن توسے ف و ... پر واقع ہوگا اور ےَ نقاط قَ اور و کے درمیان۔

کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے باہر لڑکانے سے* دیکھو شکل ۱۳۴۔ مثال کے طور پر خط صنوبری (Cardioid) کی جس کا ذکر دفعہ ۱۲۴ مثال ۳/۱ میں پہلے آیا ہے، دوہری تکوین دی جاتی ہے۔ ۳۶۷

شکل (۱۳۴)

جس صورت میں زاوی رفتاروں ن، نَ کی علامتیں مختلف ہوں اسے طالب علم کے معائنہ کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ کسی اُلٹے یا رجعی بردوریہ کی بطور ایک در استداری خط کے، دو الگ طریقوں سے تکوین ہو سکتی ہے اور بالخصوص کسی در تدویر کی تکوین دو قابل تعیین دائروں میں سے کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے اندر لڑکانے سے عمل میں آسکتی ہے۔

امثلہ ۴۶

انحنا

۱۔ ثابت کرو کہ دائرہ ہی ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے۔

---

* یہ یولر (۱۷۸۱) کا مسئلہ ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر انحنا کے مرکز کے محدد اس شکل میں رکھے جا سکتے ہیں

لا − فرما / فرسا ، ما + فرلا / فرسا

۳۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کی ذاتی مساوات اس شکل کی ہے

س = ا قو^(سا ہم عہ)

۴۔ ثابت کرو کہ خط جرّی کی ذاتی مساوات اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے

س = ا لوک قم سا

ثابت کرو کہ اس منحنی میں انحنا ایسے بدلتا ہے جیسے عماد۔

۵۔ ان ضابطوں فرلا / فرس = جم سا، فرما / فرس = جب سا

کے تفرق سے ثابت کرو کہ ۱ / ر = − (فر² لا / فرس²) / (فرما / فرس) = (فر² ما / فرس²) / (فرلا / فرس)

اور ۱ / ر² = (فر² لا / فرس²)² + (فر² ما / فرس²)² جہاں ر نیم قطر انحنا ہے

۶۔ اگر ایک منحنی کا ان مساواتوں سے تعین ہو

لا = فا (ت)، ما = ف (ت)

تو ثابت کرو کہ ۱ / ر = (لاَ ماً − ماَ لاً) / (لاَ² + ماَ²)^(۳/۲) جہاں زبروں سے تفرق بلحاظ ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

۷۔ اوپر کا ضابطہ قطع ناقص لا = ا جم فا، ما = ب جب فا اور قطع زائد لا = ا جمز ع، ما = ب جبز ع کی صورت میں لگاؤ۔

۸۔ ایک منحنی کی کارتیزی مساوات دی ہوئی ہے، بتاؤ کہ اسکے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) کس طرح اس کے میلان (سا) کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں

۳۶۸

اور ثابت کرو کہ

$$ر = \sqrt{\left(\frac{\text{فر}\,لا}{\text{فر}\,سا}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فر}\,ما}{\text{فر}\,سا}\right)^{۲}}$$

۹ — جس منحنی کی ذاتی مساوات س = م جب سا ہے ثابت کرو کہ وہ خط تدویر ہے (دفعہ ۱۲۰ (۳) کا طریقہ استعمال کرو)

۱۰ — "مساوی مضبوطی کے زنجیرہ" کی صورت میں معلوم ہے

ر = م قط سا (م مستقل)

جہاں سا مماس کا میلان ہے افق کے ساتھ، ثابت کرو کہ اگر مبدا سب سے نچلے نقطہ پر ہو تو لا = م سا، ما = م لوک قط سا جہاں محور لا اور ما بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔

۱۱ — ایک منحنی کی ذاتی مساوات دی گئی ہے س = م جب^{۲} سا (م مستقل)، اسکی کارٹیزی مساوات حاصل کرو

$$لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = \left(\frac{۲}{۳}\,م\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

۱۲ — اگر $ر = \frac{ا^{۲}}{ما}$ تو ثابت کرو کہ $ما^{۲} = مر - ۲ا^{۲}$ جم سا

۱۳ — وہ منحنی دریافت کرو جسکی ذاتی مساوات ہے س = ا قط^{۳} سا $\left[ا ما^{۲} = \frac{۴}{۹} لا^{۳}\right]$

۱۴ — اگر منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما متغیر ت کے دئے ہوئے تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,لا}{\text{فر}\,ت^{۲}} = \frac{\text{فر}^{۲}\,س}{\text{فر}\,ت^{۲}}\,\text{جم سا} - \frac{۱}{ر}\left(\frac{\text{فر}\,س}{\text{فر}\,ت}\right)^{۲}\text{جب سا،}$$

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,ما}{\text{فر}\,ت^{۲}} = \frac{\text{فر}^{۲}\,س}{\text{فر}\,ت^{۲}}\,\text{جب سا} + \frac{۱}{ر}\left(\frac{\text{فر}\,س}{\text{فر}\,ت}\right)^{۲}\text{جم سا}$$

ان نتائج کی حرکیاتی تعبیر بیان کرو۔ اسلئے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ر} = \left\{ \left(\frac{فر^2 لا}{فرت^2}\right)^2 \times \left(\frac{فر^2 ما}{فرت^2}\right)^2 - \frac{فر^2 س}{فرت^2} \right\} \div \left(\frac{فرس}{فرت}\right)^4$$

۱۵- ستارہ نما $لا = ا\,جم^3 طہ$، $ما = ا\,جب^3 طہ$ میں ثابت کرو کہ $سا = \pi - طہ$ اور اس سے ثابت کرو کہ $ر = ۳\,ا\,جب طہ\,جم طہ$

۱۶- اگر $لا = ا\,ت^2$، $ما = ۲\,ا\,ت$ تو مرکز انحنا کے محدد ہیں $ا(۲ + ۳ت^2)$، $-۲\,ا\,ت^3$

۱۷- دفعہ ۱۳۵ (۲) کے کارٹیزی ضابطہ سے ثابت کرو کہ قائم قطع زائد $لا\,ما = م^2$ میں $ر = \frac{(لا^2 + ما^2)^{\frac{3}{2}}}{۲م^2}$

۱۸- نیز قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں $ر = \frac{(ا^2 - ز^2 لا^2)^{\frac{3}{2}}}{اب}$

۱۹- نیز قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں $ر = \frac{(ز^2 لا^2 - ا^2)^{\frac{3}{2}}}{اب}$

۲۰- نیز قطع مکافی $ما^2 = ۴\,ا\,لا$ میں $ر = \frac{۲(ا + لا)^{\frac{3}{2}}}{ا^{\frac{1}{2}}}$

۲۱- نیز نیم کعبی مکافی $ا\,ما^2 = لا^3$ میں $ر = \frac{لا^{\frac{1}{2}}(۴ا + ۹لا)^{\frac{3}{2}}}{۶ا}$

۲۲- نیز کعبی مکافی $ا^2 ما = لا^3$ میں $ر = \frac{ا^2}{۶لا}\left(۱ + ۹\frac{لا^4}{ا^4}\right)^{\frac{3}{2}}$

۲۳- نیز ستارہ نما $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} = ا^{\frac{2}{3}}$ میں $ر = -۳(ا\,لا\,ما)^{\frac{1}{3}}$

۲۴- ایک منحنی کے متغیر نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع ثابت نقطہ (ضا، عا) سے اس جملہ $(لا - ضا)^2 + (ما - عا)^2$، سے تعبیر ہوتا ہے، اس جملہ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ جب یہ فاصلہ اقل ہو تو نقطہ (لا، ما) کو لازماً اُس عماد کے پایہ پر واقع ہونا چاہئے جو (ضا، عا) سے اس منحنی تک کھینچ سکتا ہے۔

۲۷۰

تیز یہ فاصلہ اقل ہوگا اگر نقطہ (ضا، عا) مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ قریب ہو اور اعظم ہوگا اگر یہ نقطہ مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ بعید ہو۔

۲۵۔ اگر منحنی کو ابدال $\text{لاَ} = \text{عہ لا}$، $\text{ماَ} = \text{بہ ما}$ سے تحویل کیا جائے تو کسی نقطہ پر کا انحنا اس نسبت سے بدل جاتا ہے $\dfrac{\text{عہ بہ}}{(\text{عہ}^2\,\text{جم}^2\,\text{سا} + \text{بہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{سا})^{\frac{3}{2}}}$ جہاں سا ہے محور لا کے ساتھ اصلی منحنی کا میلان۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ
$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \frac{\text{۳ ع ق}^2 - (\text{۱} + \text{ع}^2)\,\text{ر}}{\text{ق}^2}$$
جہاں $\text{ع} = \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\text{ق} = \dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$، $\text{ر} = \dfrac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3}$

۲۷۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر انحنا $\dfrac{\text{ا جم}\,\frac{\text{فہ}}{\text{۲}}}{\text{ر رَ}}$ ہے جہاں ر، رَ ماسکی فاصلے ہیں اور فہ ان کا درمیانی زاویہ ہے۔

۲۸۔ قائم قطع زائد $\text{ر}^2\,\text{جم ۲ طہ} = \text{ا}^2$ میں $\text{ں} = \dfrac{\text{ر}^3}{\text{ا}^2}$

۲۹۔ چشم منحنی
$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم ۲ طہ} \text{ میں } \text{ں} = \frac{\text{ا}^2}{\text{۳ ر}}$$

۳۰۔ منحنی $\text{ر}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}}\,\text{جم م طہ}$ میں $\text{ں} = \dfrac{\text{ر}^2}{(\text{م}+\text{۱})\,\text{ع}} = \dfrac{\text{ا}^{\text{م}}}{(\text{م}+\text{۱})\,\text{ر}^{\text{م}-\text{۱}}}$　　۳۷۱

۳۱۔ ضابطہ $\text{ں} = \dfrac{\text{ر فر ر}}{\text{فر ع}}$ لگانے سے بر تدویر کے کسی نقطہ پر کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔ (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۴۴۹)
دائرہ کے دریچہ کی صورت کا معائنہ کرو۔

۳۲۔ اگر منحنی کی مساوات اس شکل $\text{ر} = \text{ف}(\text{ع})$ میں دی ہوئی ہو تو قطب سے

گذرنے والا ونزا انحنا ہوگا $۲ ع \frac{فر ر}{فر ع}$

ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گذرنیوالا ونزا انحنا سمتی نیم قطر کا $۱\frac{۱}{۳}$ گنا ہوتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ قطب میں سے گذرنے والا منحنی $ر^م = ا^م$ جم م طہ کے کسی نقطہ پر کا ونزا انحنا $\frac{۲ ر}{م+۱}$ ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ منحنی ر = ف (ع) کے پائین منحنی کا انحنا بلحاظ مبدأ کے $\frac{۲}{ر} - \frac{ع}{ر^۳}$ ہے جہاں ر، ع، ر اصلی منحنی سے متعلق ہیں۔

۳۵۔ ایک قطع ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں، ثابت کرو کہ بلحاظ مرکز کے اسکے پائین منحنی کا انحنا $\frac{۳}{ر} - \frac{ا^۲+ب^۲}{ر^۳}$ ہے جہاں ر قطع ناقص کے متناظر نقطہ کا سمتی نیم قطر ہے۔

۳۶۔ ذیل کے ضابطہ کو ثابت کرو۔

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر}\left(\frac{فر ر}{فر س}\right)^۲ - \frac{فر^۲ ر}{فر س^۲} \right\} \div \left\{ ۱ - \left(\frac{فر ر}{فر س}\right)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

اور مثال ۲۴ کے نتائج حاصل کرنے میں اسے لگاؤ۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں اپل مماس کے لئے شرط ہے

$$\frac{فر^۲ ع}{فر طہ^۲} + ع = ۰ \quad \text{جہاں } ع = \frac{۱}{ر}$$

۳۸۔ اِس ضابطہ $س = طہ + فہ = طہ + مم^{-۱} \frac{۱}{ر}\frac{فر ر}{فر طہ}$ سے قطبی محددوں میں انحنا کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو

۳۰۲

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ ر^۲ - ر\frac{فر^۲ ر}{فر طہ^۲} + ۲\left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^۲ \right\} \div \left\{ ر^۲ + \left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^۲ \right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= \left(\frac{فر^۲ ع}{فرط^۲} + ع\right) \div \left\{ ۱ + \left(\frac{۱}{ع} \frac{فرع}{فرط}\right)^۲ \right\}^{\frac{۳}{۲}} \quad جہاں \quad ع = \frac{۱}{ر}$$

۳۹ - اس ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ مبدأ میں سے گذرنیوالا وتر انحنا ہے

$$۳ \left\{ ۱ + \left(\frac{۱}{ع} \frac{فرع}{فرط}\right)^۲ \right\} \div \left(\frac{فر^۲ ع}{فرط^۲} + ع\right)$$

امثلہ ۷۴

نیوٹن کا طریقہ

۱- منحنی $ا ما^۲ = (لا - عا)(لا - با)^۲$ کا نیم قطر انحنا نقطہ (عا، ۰) پر ہے

$$\frac{(عا - با)^۲}{۲ا}$$

۲- نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ زنجیرہ $ما = ا جمز \frac{لا}{ا}$ کے راس پر نیم قطر انحنا ا کے مساوی ہے۔

۳- نقطہ (-ا، ۰) پر منحنی $ما^۲ = ا^۲ (ا + لا)/لا$ کا نیم قطر انحنا $\frac{ا}{۲}$ ہے۔

۴- ڈاین $ما^۲ = ا^۲ (ا - لا)/لا$ کا نیم قطر اس کے راس پر $\frac{ا}{۲}$ ہے۔

۵- نقطہ (ا، ۰) پر منحنی $ا^۲ ما^۲ = لا^۳ (ا - لا)$ کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔

۶- مکافی $(لا - ما)^۲ - ۲ا (لا + ما) + ا^۲ = ۰$ کا نیم قطر انحنا ان نقطوں پر دریافت کرو جہاں پر یہ محوروں کو مس کرتا ہے۔

۷- نقطہ $لا = \frac{\pi}{۲}$ پر منحنی $ما = ۴ جب لا - جب ۲لا$ کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔
[۲،۷۹۵ . . . . ۰]

۸- مکافی $ما = م لا + \frac{لا^۲}{ا}$ میں، مبدأ پر، محور ما کے متوازی وتر انحنا کا طول $(۱ + م^۲) ا$ ہے اور دائرہ انحنا کی مساوات ہے

$$لا^۲ + ما^۲ = (۱ + م^۲) ا (ما - م لا)$$

۹- منحنی $ما = م لا + ن (لا - ا)^۲ (لا - ب)^۲$ کا انحنا نقاط (ا، ۰)، (ب، ۰) پر

دریافت کرو۔

$$\left[\frac{(۱+م^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{۴ن(ا-ب)^{۲}} \right]$$

۱۰۔ مبدا پر مخروطی $ما = ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲}$ کے دائرہ انحنا کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ منحنی سے دوبارہ خط مستقیم $(ا-ب)ما = ۲ ھ لا$ پر ملتا ہے۔

۱۱۔ اگر ایک منحنی کی قطبی مساوات $ر = فہ(طہ)$ ہو جہاں $فہ(طہ)$، طہ کا جفت تفاعل ہے تو نقطہ طہ = ۰ پر انحنا ہے $\frac{فہ(۰) - فہ''(۰)}{[فہ(۰)]^{۲}}$

۱۲۔ زیادہ سے زیادہ کشش کے مجسم (دیکھو مثال ۱۹ صفحہ ۴۴۹) کے نصف النہاری منحنی میں ثابت کرو کہ محور کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب ∞ اور $\frac{۲}{۳}$ ا ہیں۔

۱۳۔ چشمہ منحنی $ر^{۲} = ا^{۲} جم ۲ طہ$ کے کسی ایک سرے پر نیم قطر انحنا $\frac{ا}{۳}$ ہے۔

۱۴۔ استداری خط $لا = ا طہ + ک جب طہ، ما = ا - ک جم طہ$ کے نیم قطر انحنا ان نقطوں پر جہاں یہ قاعدہ سے نزدیک ترین اور بعید ترین ہے $\frac{(ا \pm ک)^{۲}}{ک}$ ہیں۔

۱۵۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ بردوریہ

$$لا = ا_{۱} جم ن_{۱} ت + ا_{۲} جم ن_{۲} ت ، ما = ا_{۱} جب ن_{۱} ت + ا_{۲} جب ن_{۲} ت$$

کے انحنا کے نیم قطر ان نقاط پر جو مرکز سے قریب ترین اور بعید ترین ہیں یہ ہیں

$$\frac{(ن_{۱} ا_{۱} \pm ن_{۲} ا_{۲})^{۲}}{ن_{۱}^{۲} ا_{۱} \pm ن_{۲}^{۲} ا_{۲}}$$

یہ شرط مستنبط کرو کہ مرکز سے قریب ترین نقاط پر بردوریہ کو مرکز کی جانب مقعر ہونا چاہئے (جیسے چاند کا مدار بلحاظ سورج کے)۔

۱۶۔ لیساژو کے منحنی $لا = ا جم ن ت ، ما = ا جب ن ت$ کے نقطہ

ت ۔ پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔
اس منحنی کا خاکہ کھینچو۔ [۴ پ۲ / ل]

۱۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات قطبی محددوں (ر، طہ) میں ہو اور قطب منحنی پر واقع ہو اور ابتدائی خط قطب پر کا مماس ہو تو ثابت کرو کہ قطب پر انحنا کا قطر = نہا $\frac{ر}{طہ}$
منحنی ر = ا جم م طہ کے قطب پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر ایک منحنی پر نقطہ پ ایسا ہو کہ اس پر کا انحنا غیر مسلسل ہو لیکن مماس کی سمت غیر مسلسل نہ ہو اور پ کی مقابل جانبوں میں پاس کے نقطے ق، ر ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ پ ق ر کا انحنا آخر الامر ہوگا $\frac{م_۱}{ر_۱} + \frac{م_۲}{ر_۲}$ جہاں ر۱، ر۲ دیے ہوئے منحنی کے انحنا کے نیم قطر ہیں پ کے دونوں جانب اور م۱، م۲ نسبتوں $\frac{پ ق}{ق ر}$ اور $\frac{پ ر}{ق ر}$ کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

۱۹۔ حادہ زاویہ جو ایک منحنی کا ایک وتر پ ق، پ پر کے مماس کے ساتھ بناتا ہے جبکہ ق کو پ کے لا انتہا قریب لیا جاتا ہے آخر الامر $\frac{۱}{۲} \frac{مف س}{ر}$ کے مساوی ہے جہاں مف س قوس پ ق ہے اور ر نیم قطر انحنا ہے پ پر۔

۲۰۔ اگر ایک لا انتہا چھوٹی قوس پ ق کے سروں پر کے مماس مر پر ملیں تو آخر الامر مر پ اور مر ق نسبت تساوی میں ہونگے۔
یہ کیوں حاصل نہیں ہوتا کہ مر کو پ ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملانیوالا خط آخر الامر پ ق پر عمود وار ہوگا۔

۲۱۔ یہ تسلیم کر کے کہ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نیم قطر $\frac{۱}{۲} \frac{ا}{جب ا}$ ہے ثابت کرو کہ مثال ۱۹ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لمسی دائرہ انحنا کے دائرہ پر منطبق ہوتا ہے۔

۲۲- ثابت کرو کہ جب ایک ذرہ پر حاصل قوت حرکت کی سمت میں ہو تو راستہ کا مماس "اچل" ہوتا ہے۔

امثلہ ۴۸

(لفاف - بریچے)

۱- مکافیات $ما^۲ = ۴ عہ (لا - عہ)$ کا لفاف خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے جہاں عہ متبدل ہے۔

۲- مکافی $ما^۲ = ۴ ا لا$ کے کسی نقطہ پ سے محددوں کے محوروں پر عمود پ م، پ ن نکالے گئے ہیں، م ن کا لفاف دریافت کرو۔

[$ما^۲ = - ۱۶ ا لا$]

۳- خط لا جم عہ + ما جب عہ = ا قط عہ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔　۲۷۵

۴- مکافیوں $ا ما^۲ = عہ^۲ (لا - عہ)$ کا لفاف جہاں عہ متبدل ہے یہ منحنی ہے $ا ما^۲ = \frac{۴}{۲۷} لا^۳$

۵- ایک منحنی کے سمتی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ انکا لفاف دئے ہوئے منحنی کا پائین خط ہے بلحاظ مبدا کے۔

۶- مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کا لفاف معلوم کرو۔

۷- ایک دائرہ کے محیط پر کے ثابت نقطہ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں، ان وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کا لفاف خط صنوبری ہے۔

۸- قائم قطع زائد کے مرکزی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا لفاف برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۹- ثابت کرو کہ منحنیات پ جم عہ + ق جب عہ = ط کا لفاف جہاں پ، ق، ط متغیروں لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل ہیں اور عہ متبدل ہے

$\text{پ}^2 + \text{ق}^2 = \text{ط}^2$ ہے۔

۱۰۔ دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲\text{ا لا جم عہ} - ۲\text{ا ما جب عہ} = \text{ج}^2$ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۱۔ ع اور عہ کے درمیان رشتہ معلوم کرو کہ خط مستقیم $\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} = \text{ع}$ دائروں $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ما}^2 = \text{ب}^2$ اور $(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ سے مساوی طول کے وتر کاٹے۔ ثابت کرو کہ اس شرط کے ماتحت خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

۱۲۔ مستقل رقبہ کے ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کا مرکز وہی ہے اور جنکے محور سمت میں ایکدوسرے پر منطبق ہیں، ثابت کرو کہ لفاف دو مزدوج قائم زائدوں پر مشتمل ہے۔

۱۳۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (± ج، ۰) سے اس پر کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل $(= \text{ب}^2)$ ہے ثابت کرو کہ لفاف ناقص ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2 + \text{ج}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ اگر عمود متحرک خط کے ایک ہی جانب ہوں یا زائد ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2 - \text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ اگر عمود خط کی متقابل جانبوں میں ہوں۔

۳۷۶

۱۴۔ قطع مکافی $\text{ما}^2 = ۴\text{ا لا}$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کا لفاف $\text{ما}^2 = ۴\text{ا} (\text{لا} + \text{ا})$ ہے۔

۱۵۔ قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ لفاف ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ہے۔

۱۶۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (± ج، ۰) سے خط پر کے عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل $(= ۲\text{م}^2)$ ہے ثابت کرو کہ لفاف

مخروطی تراش $\frac{x^2}{m^2 - c^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ہے، مختلف صورتوں کا معائنہ کرو۔

۱۷- ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ لفاف قطع ناقص ہے۔

۱۸- ان ناقصوں $x = 2b(\cos - \alpha)$، $y = b \sin \theta$ کا لفاف معلوم کرو جہاں α متبدل ہے۔

۱۹- متبدل ج کے لئے جو زنجیرے $y = c \cosh \left(\frac{x}{c}\right)$ سے تعبیر ہوتے ہیں ان کا لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے۔

۲۰- ان ناقصوں $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کا لفاف جہاں $a + b = m$ (مستقل) ستارہ نما $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۲۱- خط مستقیم کا لفاف جو محددوں کے محوروں پر ایسے مقطوعے کاٹتا ہے جن کا مجموعہ م ہے قطع مکافی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{m}$ ہے۔

۲۲- دو نقطے محددوں کے محوروں پر مختلف، مستقل رفتاروں سے حرکت کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا خط ایک قطع مکافی کو مس کرتا ہے۔

۲۳- قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے کسی نقطہ سے محددوں کے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے قدموں کو ملانیوالے خط مستقیم کا لفاف $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ ہے۔

۲۴- منحنیات $a y^2 = x (x + a)^2$ کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق دریافت کرو جہاں a متبدل ہے۔ اور جو نتیجہ حاصل ہو اسکا معائنہ کرو۔

۲۵- مستقل نیم قطر کے ایک دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک دئے ہوئے منحنی پر واقع

ہوتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنی ہیں ۔

۲۶ ۔ دئے ہوئے نیم قطر کا ایک دائرہ ایک دئے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنیات پر مشتمل ہے ۔

۲۷ ۔ اگر ایک منحنی کی مساوات اس شکل ل۲ = ف (ع) میں دی ہوئی ہو تو اسکے کسی متوازی منحنی کی مساوات اس شکل ل۲ = ف (ع ۔ ج) + ۲ ج ع ۔ ج۲ میں ہوگی ۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ منفی پائیں منحنیات (دفعہ ۱۳۱) کا مسئلہ خط مستقیم لا جم سا + ما جب سا = ع کا لفاف معلوم کرنیکے معادل ہے جہاں ع متبدل سا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے ۔

اسکی تصدیق کرو کہ اسی سے دفعہ ۱۳۱ کا ضابطہ (۴) حاصل ہوتا ہے ۔

۲۹ ۔ ثابت کرو کہ مکافی ما۲ = ۴ ا لا کا منفی پائیں منحنی بلحاظ راس کے یہ منحنی ہے ا ما۲ = ۱/۲۷ (لا ۔ ۴ ا)۳

۳۰ ۔ لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ دائرہ کا منفی پائیں منحنی قطع ناقص ہوگا اگر قطب دائرہ کے اندر ہو اور قطع زائد ہوگا اگر قطب دائرہ کے باہر ہو

۳۱ ۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کے کسی نقطہ پر انحنا کے نیم قطر کے سامنے قطب پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ۔

۳۲ ۔ مساوی الزاویہ لولبی کا پرپیچہ اسی زاویہ کا مساوی الزاویہ لولبی ہوتا ہے ۔

۳۳ ۔ قطع ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ۱ کے پرپیچہ سے گھرا ہوا رقبہ ۳ ط (ا۲ ۔ ب۲)۲ / ۸ ا ب ہے ۔

۳۴ ۔ منحنی ا ما۲ = لا۳ کے کسی نقطہ پر کے مرکز انحنا کے محدد ہیں

ضا = ۔ لا ۔ ۹/۲ · لا۲/ا ، صا = ۴ ما + ۴/۳ · ا ما/لا

ثابت کرو کہ مبدأ کے نزدیک پرپیچہ کی شکل مکافی ما۲ = ۔ ۱۶/۹ ا لا کی ہے ۔

۳۵ ۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی نقطہ انعطاف رکھتا ہو تو اس کا پرپیچہ

ایک متقارب رکھتا ہے۔

ثابت کرو کہ منحنی $ا^۲ ما = لا^۳$ کے برپیچہ کا وہ حصہ جو منحنی کے اس حصہ کے جواب میں ہے جو مبدا کی پڑوس میں ہے تقریباً قطع زائد $لا ما = \frac{۱}{۱۲} ا^۲$ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

۳۶۔ قطع زائد لا = ا جمز ع، ما = ب جبز ع کا برپیچہ

$(ا لا)^{\frac{۲}{۳}} - (ب ما)^{\frac{۲}{۳}} = (ا^۲ + ب)^{\frac{۲}{۳}}$ ہے۔

۳۷۔ نقطہ و سے شعاعین نکلکر ایک دئے ہوئے منحنی سے منعکس ہوتی ہیں، ثابت کرو کہ منعکسہ شعاعیں سب کی سب ایسے منحنی پر عماد ہیں جو بلحاظ و کے، معلومہ منحنی کے پائیں منحنی کا متشابہ ہے لیکن دوہرے ابعاد والا ہے۔

۳۸۔ اس لئے ثابت کرو کہ دائرہ پر کے انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ گھونگا منحنی کا برپیچہ ہے۔ اور اس خاص صورت میں جبکہ روشن نقطہ دئے ہوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہے آتشی خط صنوبری ہے۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی پر انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ ایسے دائروں کے نظام کے لفاف کا برپیچہ ہے جو منحنی کے مختلف نقطوں کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور سب کی سب روشن نقطہ میں سے گذریں۔

انعطاف کی صورت میں متناظر مسئلہ کیا ہوگا۔

۲۷۹

امثلہ ۴۹

(گردو نئے، وغیرہ)

۱۔ ایک پٹر کسی طرح سے بھی اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ پٹر سے بیں کے متوازی خطوط متوازی منحنیات کو لف کرتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور اس پر کا ایک نقطہ ف ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے جو و میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ فوری مرکز ف میں سے گذرنیوالے

قطر کا دوسرا سرا ہے اور دو مرکز طریق دریافت کرو۔

گھونگا منحنی کے عماد کھینچنے کا عمل دریافت کرو اور اس سے یہ نتیجہ حاصل کرو کہ خط صنوبری میں، قرن میں سے گذرنے والے وتر کے سروں پر کے عماد، اس خط پر علی القوائم کاٹتے ہیں جو اس نقطہ (قرن) میں سے وتر پر عمود ہو۔

۳۔ ایک مستوی شکل اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس میں کے دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں، دو مرکز طریق کو دریافت کرو۔

۴۔ اگر ایک دائرہ اپنے سے نصف ناپ کے ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے اور پورا اسکے گرد آجائے تو ہر ایک خط مستقیم جو لڑھکنے والے دائرہ پر سوار ہو ایک دائرہ کو لفت کریگا۔

۵۔ اگر ایک مستوی شکل اسطور پر حرکت کرے کہ اس میں کا ایک خط مستقیم ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے تو شکل میں کے کسی اور خط مستقیم کا لفاف دائرہ کا ایک دریچہ ہے۔

۶۔ خط مستقیم عہ لا + بہ ما = ۱ کے لفاف کا نیم قطر انحنا جہاں عہ، بہ متبدل ت کے دئے ہوئے تفاعل ہیں $\pm \frac{(عہ^{2} + بہ^{2})^{\frac{3}{2}} (عہَ بہً - عہً بہَ)}{(عہ بہَ - عہَ بہ)^{3}}$

ہے جہاں زبریں بلحاظ ت کے تفرقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

۷۔ اگر ایک منحنی جسکی مماس قطبی مساوات ر = ف (ع) ہے ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کے راستہ کا انحنا ہے۔ $\frac{فَ (\frac{ع}{ر})}{فَ(ع)}$ جہاں مر نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اگر قطع مکافی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو ماسکہ کا راستہ زنجیرہ ہے۔

۹۔ اگر ایک مخروطی تراش ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو کسی ایک ماسکہ کا راستہ ایک منحنی ہے $\frac{1}{ر} + \frac{1}{د} = \frac{1}{ج}$ جہاں ر نیم قطر انحنا ہے، د عماد ہے اور ج مستقل۔

۲۸۰

۱۰ — اگر ایک مساوی الزاویہ لولبی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ ایک خط مستقیم ہوگا۔

۱۱ — اگر شکافی لولبی ر = $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ خط جبری ہوگا۔

۱۲ — اگر کوٹس کے لولبیوں $\frac{1}{ع^2} = \frac{1}{ر^2} + ب$ میں سے کوئی ایک، ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب ایک منحنی مرتسم کریگا جس کا انحنا ایسے بدلیگا جیسے عماد۔

۱۳ — ایک منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہے، ثابت کرو کہ اُس گردونیہ کی قوس جسے کوئی برداشتہ نقطہ مرتسم کرتا ہے اِس منحنی کی متناظر قوس کے مساوی ہے جو بلحاظ و کے دئے ہوئے منحنی کا پائین منحنی ہے۔ [Steiner]

۱۴ — بند بیضوی منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہے، ثابت کرو کہ وہ متغیر خط جو نقطہ تماس کو اندرونی محمولہ نقطہ و سے ملاتا ہے ایک پوری گردش میں اتنا رقبہ عبور کرتا ہے جو بلحاظ نقطہ و دے ہوئے منحنی کے پائین منحنی کے رقبہ کا دوچند ہے۔ [Steiner]

۱۵ — فوری مرکز کے نظریہ سے ثابت کرو کہ جب جوڑدار ڈنڈوں کے مستوی ذوار بعتہ الاضلاع سے گھرا ہوا رقبہ اہل (ساکن) ہو تو ذوار بعتہ الاضلاع ہم محیط ہوگا۔

اصطلاحات صغاری احصا

جلد دوم

علم آواز	Acoustics
لنگر چھلا	Anchor-ring
حلقہ دار، حلقہ نما	Annular
ستارہ نما	Astroid
متقارب	Asymptotes
معاون دائرہ	Auxiliary circle
دوقطبی	Bipolar
جسمی مرکز طریق	Body centrode
خط صنوبری	Cardioid
خط برداشتہ	Carried line
زنجیرہ	Catenary
آتشعی	Caustic
مرکز خط	Centrode
گھماؤ کا مرکز	Centre of rotation
چکر	Circuit
لبلابی خط	Cissoid
شہاب	Comet
متوافق	Commensurable
مخروط	Cone
مخروطی	Conic
ہم ارتفاعی خط	Contour line
استدقاق	Convergence
کرینک	Crank
فاصل صورت	Critical case
متقاطع متوازی الاضلاع	Crossed parallelogram
قرن	Cusp

Cyclic Quadrilateral	ہم محیط چار ضلعی
Cycloid	خط تدویر
Definite integral	محدود تکملہ
Directrix	مرتب
Eccentricity	خروج المرکز
Ecliptic	طریق الشمس
Ellipsoid	ناقص نما
Elliptic Integral	ناقصی تکملہ
Ellipticity	ناقصیت
Envelope	لفافہ
Epicyclic	بردوریہ
Epicycloid	برتدویر
Epitrochoid	بلاستداری
Equipotential	ہم قوہ
Evolute	برپیچ
Flexure	خم
Focus	ماسکہ
Frustum	ناقص نامکمل ، مقطوعہ
Geodesy	ارضیات
Harmonic	موسیقی
Hyperboloid	زائد نما
Hypocycloid	درتدویر
Hypotrochoid	برتدویر

Impulse	دھکہ
Indefinite Integral	نامحدود تکملہ
Indicator diagram	نمایندہ تصویر
Index	نمایندہ ، اشاریہ
Instantaneous centre	فوری مرکز
Integral	تکملہ
Integration	تکمل
Integration by parts	تکمل بالحصص
Intercept	ابتی حصہ
Interpolation	بینی ادراج
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Involute	درپیچ
Irrational	غیر ناطق
Lamina	پترا
Latus-rectum	وتر خاص
Lemniscate	چشمی منحنی
Limacon	گھونگا منحنی

English	اردو
Line-roulette	خط گردونیہ
Linkage	رابطہ
Link-work	رابطہ کاری
Loop	حلقہ
Magnetic curves	مقناطیسی منحنی
Mechanical	حیلی
Modulus	مقیاس
Multiple Integral	ضعفی تکملہ
Node	عقدہ
Optical	مناظری
Optics	علم مناظر
Orientation	تشریق
Oscillating cylinder	اہتزازی اسطوانہ
Osculating circle	لثمی دائرہ
Oval	بیضہ
Paraboloid	مکافی نما
Parameter	متبدل
Partial	جزوی
Pericycloid	گرد تدویر
Period	دور
Phase	ہیئت
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Planimeter	سطح پیما
Point-roulette	نقطہ گردونیہ
Polar	قطبی
Pole	قطب
Prolate Ellipsoid	لمبوترا ناقص نما
Prolate spheroid	لمبوترا کرہ نما
Pyramid	مخروط مضلع
Quadrature	تربیع
Range	ٹپہ
Rational	منطق
Reciprocal	متکافی
Rectification	تخطیط
Reduction	تحویل
Reflection	انعکاس
Refraction	انعطاف
Refractive Index	انعطاف نما
Retrograde	رجعی
Rolling curves	لڑھکنے منحنی یا غلطان منحنی
Roulette	گردونیہ
Screw-thread	پیچ تاگا
Semi-cubical parabola	نیم کعبی مکافی
Space centrode	فضائی مرکز طریق
Space Integral	مکانی تکملہ
Spandril	کمان شانہ

کرہ نما	Spheroid
لولبی	Spiral
اچل، مستقیم	Stationary
بھاپ انجن	Steam Engine
گردشی سطح	Surface of revolution
تناؤ	Tension
موج گھڑی	Tidal clock
زمانی تکملہ	Time integral
خط جرّی	Tractrix
خط رمی	Trajectory
ماورائی	Transcendental
منحرف	Trapezium
استداری خط	Trochoid
موج	Undulation
سمتی	Vector
اگنیسی کی ڈاین	Witch of Agnesi

اشاریہ

اعداد صفحوں کے لحاظ سے